KLUCZ

Nr zadania	Odpowiedź	Schemat punktowania
1.	B	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
2.	A	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
3.	D	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
4.	P, F	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
5.	C	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
6.	25%	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
7.	A, D	**2 pkt** – dwie odpowiedzi poprawne. **1 pkt** – jedna odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
8.	C	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
9.	$x=\frac{\sqrt{2}}{3}$	**3 pkt** – poprawne rozwiązanie równania i zapisanie odpowiedzi: $x=\frac{\sqrt{2}}{3}$. **2 pkt** – przyrównanie do zera dwóch czynników $x^2+2=0$ oraz $3x-\sqrt{2}=0$. **1 pkt** – zapisanie równania w postaci iloczynowej $(x^2+2)(3x-\sqrt{2})=0$. **0 pkt** – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.
10.	C	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
11.		**2 pkt** – zapisanie sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jako sumy dwóch składników, z których jeden jest iloczynem liczby 12, np. $(2n)^2+(2n+2)^2+(2n+4)^2=12(n^2+2n+12)+8$ oraz sformułowanie odpowiedniego wniosku z powołaniem się na zapis liczby, która przy dzieleniu przez 12 daje resztę 8. **1 pkt** – zapisanie sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jako sumy dwóch składników, z których jeden jest iloczynem liczby 12, np. $(2n)^2+(2n+2)^2+(2n+4)^2=12(n^2+2n+1)+8$ **0 pkt** – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania; przeprowadzenie dowodu dla konkretnych wartości liczb parzystych.
12.	D	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
13.	B, 1	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Nr zadania	Odpowiedź	Schemat punktowania
14.1.	A	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
14.2.	$f(x)=\frac{2}{9}(x+2)(x-4)$	**2 pkt** – wyznaczenie wartości współczynnika $a=\frac{2}{9}$ i zapisanie odpowiedzi $f(x)=\frac{2}{9}(x+2)(x-4)$. **1 pkt** – poprawne odczytanie miejsc zerowych funkcji *f*, czyli liczb -2 i 4 oraz podstawienie ich do postaci iloczynowej $f(x) = a(x + 2)(x - 4)$. **0 pkt** – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawna metodę, albo brak rozwiązania.
14.3.	$x \in (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
15.1.	30000	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
15.2.	C	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
16.	P, F	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
17.	$a_{100} = 195$	**3 pkt** – poprawne wyznaczenie wyrazu setnego $a_{100} = 195$. **2 pkt** – poprawne obliczenie wyrazu pierwszego $a_1 = -3$ oraz różnicy $r = 2$. **1 pkt** – zapisanie dwóch różnych równań przedstawiających zależność między wyrazem pierwszym a_1 a różnicą *r*, np. $a_1 + 13r = 23$ i $\frac{2a_1 + 4r}{2} \cdot 5$. **0 pkt** – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.
18.	A	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
19.	P, P	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
20.	$\frac{\sqrt{7}}{14}$, $P=6\sqrt{3}$	**3 pkt** – poprawne obliczenie cosinusa kąta *CAB* i podanie wyniku $\frac{\sqrt{7}}{14}$ oraz poprawne obliczenie pola trójkąta *ABC* i zapisanie wyniku $P=6\sqrt{3}$. **2 pkt** – poprawne obliczenie cosinusa kąta *CAB* i podanie wyniku $\frac{\sqrt{7}}{14}$. **1 pkt** – zapisanie poprawnej równości wynikającej z twierdzenia cosinusów zastosowanej do kąta *CAB*, np. $6^2 = 4^2 + (2\sqrt{7})^2 - 2\cdot 4\cdot 2\sqrt{7}\cdot \cos\measuredangle CAB$ lub poprawne obliczenie pola trójkąta i zapisanie wyniku $P=6\sqrt{3}$. **0 pkt** – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.
21.	C	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Nr zadania	Odpowiedź	Schemat punktowania
22.	B, 3	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
23.	D	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
24.	A	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
25.	C	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
26.	C	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
27.	$P(A)=\frac{1}{150}$	**3 pkt** – poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A i podanie poprawnego wyniku: $P(A)=\frac{1}{150}$. **2 pkt** – obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych i liczby wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A: $\lvert\Omega\rvert = 900$, $\lvert A\rvert = 6$. **1 pkt** – obliczenie liczby $\lvert\Omega\rvert$ wszystkich zdarzeń elementarnych: $\lvert\Omega\rvert = 900$ lub wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: 130, 310, 220, 400, 112, 202 lub obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $\lvert A\rvert = 6$. **0 pkt** – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.
28.	F, P	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
29.	Wymiary placu zabaw wynoszą 45 m × 45 m. Największa powierzchnia placu jest równa 2025 m^2.	**4 pkt** – poprawna metoda obliczenia długości dwóch boków prostokąta o największym polu oraz podanie wyników: $x = 45$ m, $y = 45$ m, $P(45) = 2025$ m^2. **3 pkt** – poprawne zapisanie wzoru na pole P prostokąta w zależności od jednej zmiennej, wyznaczenie dziedziny D tej funkcji oraz prawidłowe obliczenie argumentu x, dla którego funkcja osiąga wartość największą: $P(x) = x \cdot (90 - x)$, $D = (0, 90)$, $x = 45$. **2 pkt** – poprawne zapisanie wzoru na pole P prostokąta w zależności od jednej zmiennej $P(x) = x \cdot (90 - x)$, **1 pkt** – zapisanie związku między długościami boków prostokąta: $2x + 2y = 180$. **0 pkt** – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawna metodę, albo brak rozwiązania.

ROZWIĄZANIA

Zadanie 1.

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ oraz ze wzoru $(\sqrt{a})^2 = a$ dla $a \geq 0$

$$(5-2\sqrt{3})^2 = 5^2 - 2\cdot 5\cdot 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 = 25 - 20\sqrt{3} + 4\cdot 3 = 25 - 20\sqrt{3} + 12 = 37 - 20\sqrt{3}$$

Odp.: B

Zadanie 2.
Dodawanie tych samych składników możemy zastąpić mnożeniem, czyli $3^{2023} + 3^{2023} + 3^{2023} = 3 \cdot 3^{2023}$
Zatem

$$\frac{3^{2023}+3^{2023}+3^{2023}}{9^{-1}}=\frac{3^1\cdot 3^{2023}}{(3^2)^{-1}}=\frac{3^{2024}}{3^{-2}}=3^{2024-(-2)}=3^{2026}$$

Korzystamy z własności działań na potęgach

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

Odp.: A

Zadanie 3.
Korzystamy z własności logarytmów

$p \cdot \log_a b = \log_a b^p$

$\log_a b-\log_a c=\log_a \frac{b}{c}$

Zatem

$2\log_3 6-\log_3 12=\log_3 36-\log_3 12=\log_3 \frac{36}{12}=\log_3 3=1$

Odp.: D

Zadanie 4.
Zdanie 1. Korzystamy z własności potęgowania

jeśli $x < y$ i $a > 1$, to $a^x < a^y$. Skoro $\sqrt{3}>\sqrt{2}$ i $4 > 1$, prawdziwa jest nierówność

$4^{\sqrt{3}}>4^{\sqrt{2}}$

Zdanie 2. Korzystamy z własności potęgowania

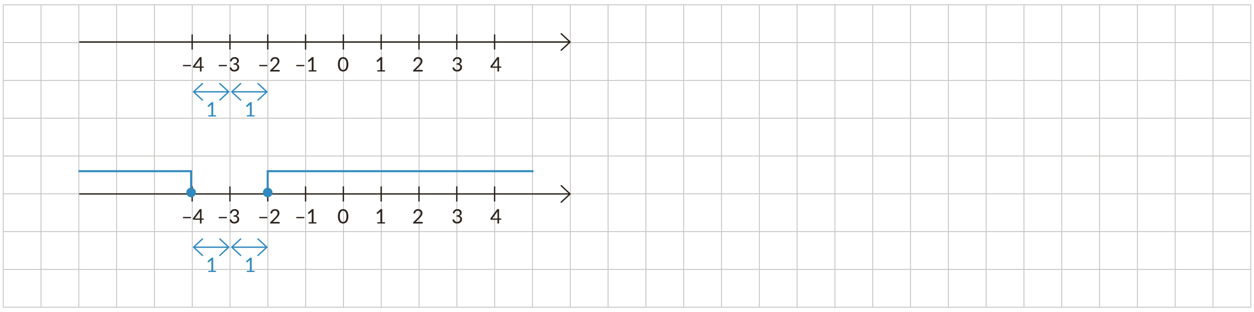
jeśli $x < y$ i $0 < a < 1$, to $a^x > a^y$. Skoro $-\pi < -1$ i $0<\frac{1}{4}<1$, prawdziwa jest nierówność

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\pi}>\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

Odp.: P, F

Zadanie 5.
Przypomnijmy, że zapis $|x - a|$ oznacza odległość liczby x od liczby a na osi liczbowej. Zatem zaznaczamy na osi liczbowej liczbę -3, a następnie dwie liczby, które odległe są od -3 dokładnie o 1 jednostkę. Są to liczby -4 i -2.

Następnie zaznaczamy graficznie wszystkie liczby, które od liczby -3 są odległe o 1 lub więcej jednostek.



Odp.: C

Zadanie 6.
Obliczamy, jakim procentem liczby $5,20$ jest różnica cen.

$$\frac{6,50-5,20}{5,20}\cdot 100\% = \frac{1,3}{5,2}\cdot 100\% = 0,25\cdot 100\% = 25\%$$

Odp.: 25%

Zadanie 7.
Rozwiążmy układ równań metodą przeciwnych współczynników, gdyż zauważamy, że przy zmiennej y mamy już przeciwne współczynniki. Zatem dodając pierwsze równanie do drugiego, otrzymujemy

$5x = -10$
$x = -2$

Wybierając dowolne równanie (to, które wydaje nam się być łatwiejsze), podstawiamy w miejsce x liczbę -2. Zatem

$$\begin{cases} x = -2 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = -2 \\ 2\cdot(-2) + y = -2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 + 4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Zatem rozwiązaniem układu równań jest para liczb $x = -2$ i $y = 2$.

Analizując kolejno odpowiedzi A–F, mamy:

A. Liczby -2 i 2 są liczbami przeciwnymi, więc ta odpowiedź jest poprawna.

B. Liczba odwrotna do liczby -2 to liczba $-\frac{1}{2}$, zatem odpowiedź ta jest niepoprawna.

C. Iloczyn tych liczb $-2 \cdot 2 = -4 \neq 0$, zatem odpowiedź C jest niepoprawna.

D. Suma kwadratów tych liczb wynosi $(-2)^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$, zatem odpowiedź D jest poprawna.

E. Suma wartości bezwzględnych tych liczb wynosi $|-2| + |2| = 2 + 2 = 4 \neq 0$ zatem odpowiedź E jest niepoprawna.

F. Suma tych liczb wynosi $-2 + 2 = 0$, ale liczba 0 nie jest liczbą dodatnią, więc odpowiedź F jest niepoprawna.

Odp.: A, D

Zadanie 8.
Wypiszmy wszystkie współczynniki wielomianu $W(x)$, który jest wielomianem trzeciego stopnia.
$a_3 = 2, \quad a_2 = -k, \quad a_1 = 10, \quad a_0 = -2k + 3$

Skoro suma tych liczb wynosi 24, więc
$2 + (-k) + 10 + (-2k + 3) = 24$

opuszczamy nawiasy bez żadnych zmian, gdyż przed nimi stoi znak +
$2 - k + 10 - 2k + 3 = 24$

redukujemy wyrazy podobne
$-3k + 15 = 24$

odejmujemy od obu stron równania liczbę 15
$-3k = 24 - 15$
$-3k = 9$
$k = -3$

Odp.: C

Zadanie 9.
Równanie wielomianowe zapisane w postaci $3x^3 - \sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2} = 0$ wymaga doprowadzenia do postaci iloczynowej (rozłożenia na czynniki). W tym celu zastosujemy metodę grupowania wyrazów.

Z dwóch pierwszych wyrazów wyłączamy wspólny czynnik x^2, a z dwóch ostatnich wspólny czynnik 2.

$x^2(3x - \sqrt{2}) + 2(3x - \sqrt{2}) = 0$

wyłączamy wspólny czynnik $(3x - \sqrt{2})$ przed nawias

$(x^2 + 2)(3x - \sqrt{2}) = 0$

korzystamy z własności $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$

$x^2 + 2 = 0$ lub $3x - \sqrt{2} = 0$

rozwiązujemy dwa równania

$x^2 = -2$ jest to równanie sprzeczne, a więc to równanie nie ma rozwiązania

$3x=\sqrt{2}$

dzielimy obie strony równania przez 3

$x=\frac{\sqrt{2}}{3}$

Odp.: Ostatecznie równanie $3x^3-\sqrt{2}x^2+6x-2\sqrt{2}=0$ ma tylko jedno rozwiązanie: $x=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Zadanie 10.

Równanie wymierne $\frac{4x(x^2-25)(x+3)}{2x-6}=0$ wymaga wyznaczenia wpierw dziedziny równania, czyli podania zbioru liczb x, dla których równanie ma sens. A sens ma wtedy, gdy nie dzielimy przez zero. Zatem

$2x - 6 = 0$
$2x = 6$
$x = 3$

Dziedziną równania jest zbiór $D = R \setminus \{3\}$, czyli wszystkie liczby rzeczywiste bez liczby 3.

Teraz możemy rozwiązać równanie, które jest w postaci ułamka przyrównanego do liczby 0. Zawsze w takiej sytuacji o wartości ułamka równej 0 decyduje wyrażenie w liczniku, które przyrównujemy do 0. Zatem

$4x(x^2 - 25)(x + 3) = 0$

korzystamy z własności $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$
$4x = 0$ lub $x^2 - 25 = 0$ lub $x + 3 = 0$

rozwiązujemy trzy równania
$x = 0$ lub $x = 5$ lub $x = -5$ lub $x = -3$

Na końcu musimy upewnić się, czy każde z potencjalnych rozwiązań należy do dziedziny równania. Widzimy, że żaden z wyników nie jest równy liczbie 3, więc ostatecznie równanie ma 4 rozwiązania.

Odp.: C

Zadanie 11.

Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wówczas trzy kolejne liczby naturalne parzyste możemy zapisać w postaci wyrażeń

$2n,\quad 2n + 2,\quad 2n + 4.$

Wykażemy, że suma kwadratów tych liczb przy dzieleniu przez 12 daje resztę 8, czyli sumę tę można zapisać w postaci $12k + 8$, gdzie k jest pewną liczbą naturalną.

Zatem korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, mamy
$(2n)^2 + (2n + 2)^2 + (2n + 4)^2 = 4n^2 + 4n^2 + 8n + 4 + 4n^2 + 16n + 16 = 12n^2 + 24n + 20 = 12n^2 + 24n + 12 + 8 =$
wyłączamy liczbę 12 jako wspólny czynnik z trzech pierwszych składników
$= 12(n^2 + 2n + 1) + 8 = 12k + 8$, gdzie $k = n^2 + 2n + 1$ jest liczbą naturalną jako suma trzech składników naturalnych (skoro n jest liczbą naturalną, to i liczby n^2, $2n$ są naturalne), co oznacza, że suma $(2n)^2 + (2n + 2)^2 + (2n + 4)^2$ przy dzieleniu przez 12 daje resztę 8.

Zadanie 12.
Z wykresu funkcji $f(x) = ax + b$ odczytujemy, że punkt $(0, 2)$ należy do jej wykresu, więc $b = 2$.

Współczynnik b we wzorze funkcji liniowej ma związek z punktem przecięcia wykresu tej funkcji z osią OY, czyli punktem $(0, b)$.

Ponadto odczytujemy również, że punkt $(3, 0)$ należy do wykresu naszej funkcji, czyli możemy podstawić jego współrzędne do wzoru funkcji, otrzymując
$0 = 3a + 2$

rozwiązujemy równanie z niewiadomą a

$3a = -2$

$a = -\frac{2}{3}$

Zatem funkcja f określona jest wzorem $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$.

Odp.: D

Zadanie 13.
Dwie proste są prostopadłe, jeśli iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy -1, czyli $a_1 \cdot a_2 = -1$

Współczynnik kierunkowy a_1 pierwszej prostej jest równy $m + \sqrt{2}$, zaś współczynnik kierunkowy a_2 drugiej prostej jest równy $m - \sqrt{2}$. Zatem

$(m + \sqrt{2}) \cdot (m - \sqrt{2}) = -1$

ze wzoru skróconego mnożenia $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$m^2 - \sqrt{2}^2 = -1$

$m^2 - 2 = -1$

$m^2 = 1$

pamiętaj o ujemnym rozwiązaniu!
$m = 1$ lub $m = -1$.

Odp.: B, 1

Zadanie 14.1.
Wykres funkcji g powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji f o 1 jednostkę w lewo wzdłuż osi OX, zatem musimy przesunąć miejsca zerowe funkcji f o 1 jednostkę w lewo.

Z wykresu funkcji f odczytujemy, że jej miejsca zerowe to liczby -2 i 4, więc miejscami zerowymi funkcji g są liczby $-2 - 1 = -3$ i $4 - 1 = 3$.

Odp.: A

Zadanie 14.2.
Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej, przy istnieniu dwóch miejsc zerowych zapisujemy jako
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$,
gdzie x_1, x_2 są miejscami zerowymi funkcji.

Z wykresu funkcji f odczytujemy miejsca zerowe: $x_1 = -2$ i $x_2 = 4$. Zatem wzór funkcji f ma postać
$f(x) = a(x - (-2))(x - 4)$
$f(x) = a(x + 2)(x - 4)$

Aby znaleźć wartość współczynnika a, wystarczy podstawić do powyższego wzoru współrzędne punktu, który należy do wykresu funkcji f. Wierzchołek $W(1, -2)$ jest takim punktem, zatem
$-2 = a(1 + 2)(1 - 4)$

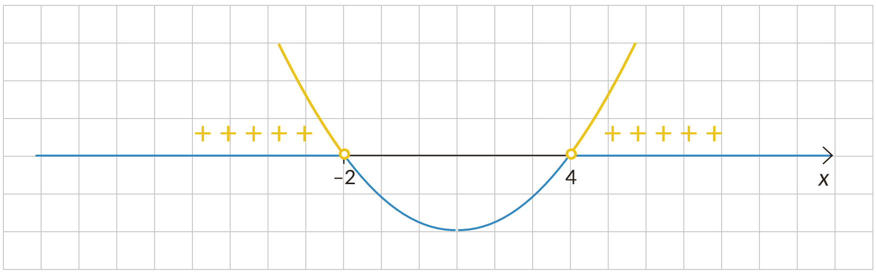
w miejsce x podstawiamy liczbę 1, w miejsce $f(x)$ podstawiamy liczbę -2.
$-2 = 3a \cdot (-3)$
$-2 = -9a$

dzielimy równanie przez -9

$$a = \frac{2}{9}$$

Odp.: Zatem wzór funkcji f w postaci iloczynowej zapisujemy jako $f(x) = \frac{2}{9}(x+2)(x-4)$.

Zadanie 14.3.
Aby rozwiązać nierówność $f(x) > 0$, odczytujemy z wykresu funkcji f zbiór tych liczb x, dla których wykres funkcji f znajduje się powyżej osi OX (bo wartości $f(x) > 0$).



Odp.: Rozwiązaniem nierówności $f(x) > 0$ są liczby $x \in (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$.

Zadanie 15.1.
Do wzoru $b(t) = b_0 \cdot 2^t$ w miejsce $b(t)$ wstawiamy liczbę $1,2 \cdot 10^5$, a w miejsce t wstawiamy liczbę 2.

Pamiętaj o zamianie jednostek czasu: 120 minut to 2 godziny. Zatem
$1,2 \cdot 10^5 = b_0 \cdot 2^2$
rozwiązujemy równanie z niewiadomą b_0.
$1,2 \cdot 10^5 = 4 \cdot b_0$
dzielimy równanie przez 4

$$b_0 = \frac{1,2 \cdot 10^5}{4} = 0,3 \cdot 100000 = 30000$$

Odp.: 30000

Zadanie 15.2.
Z treści zadania początkowa liczba bakterii, czyli b_0 jest równa 8. Zatem podstawiając tę daną do wzoru otrzymujemy
$b(t) = 8 \cdot 2^t$
$b(t) = 2^3 \cdot 2^t$

korzystamy ze wzoru $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
$b(t) = 2^{t+3}$

Aby dokonać teraz właściwego wyboru odpowiedzi, możemy policzyć ze wzoru wartość funkcji b dla wybranego argumentu $t = 1$ i sprawdzić, czy rozważany punkt $(1, b(1))$ należy do wykresu funkcji przedstawionego na rysunku. Zatem
$b(1) = 2^{1+3} = 2^4 = 16$

Zauważamy, że punkt o współrzędnych $(1, 16)$ należy tylko do wykresu funkcji przedstawionej na rysunku C.

Odp.: C

Zadanie 16.
Zdanie 1. Korzystając ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
i podstawiając w miejsce a_1 liczbę -3 i w miejsce q liczbę -2 oraz w miejsce n liczbę 100, otrzymujemy
$a_{100} = -3 \cdot (-2)^{99}$

$(-2)^{99} = (-1 \cdot 2)^{99}$ i korzystamy ze wzoru $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$

$a_{100} = -3 \cdot (-1)^{99} \cdot 2^{99}$
$a_{100} = -3 \cdot (-1) \cdot 2^{99}$
$a_{100} = 3 \cdot 2^{99}$

Zdanie pierwsze jest prawdziwe.

Zdanie 2. Obliczmy kilka pierwszych wyrazów ciągu (a_n):

$a_1 = -3$
$a_2 = -3 \cdot (-2) = 6$
$a_3 = 6 \cdot (-2) = -12$
$a_4 = -12 \cdot (-2) = 24$

Zauważamy, że wyrazy ciągu (a_n) nie są ani rosnące, ani malejące, ani stałe, stąd wniosek, że ciąg nie jest monotoniczny. Zdanie drugie jest fałszywe.

Odp.: P, F

Zadanie 17.
KROK 1. Na podstawie treści zadania tworzymy dwa równania z niewiadomą a_1 r.

Skoro $a_{14} = 23$, więc $a_{14} = a_1 + 13r$

korzystamy ze wzoru $a_n = a_1 + (n-1)r$

skoro $S_5 = 5$, więc $\frac{2a_1 + (5-1)r}{2} \cdot 5 = 5$

korzystamy ze wzoru $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$

$\frac{2a_1 + 4r}{2} \cdot 5 = 5$

dzielimy równanie przez 5

$\frac{2a_1 + 4r}{2} = 1$

$a_1 + 2r = 1$

KROK 2. Rozwiązujemy układ równań

$\begin{cases} a_1 + 13r = 23 \\ a_1 + 2r = 1 \end{cases}$

Mnożymy np. drugie równanie przez liczbę –1, aby uzyskać przeciwne współczynniki przy niewiadomej a_1.
Zatem

$\begin{cases} a_1 + 13r = 23 \\ -a_1 - 2r = -1 \end{cases}$

Dodając pierwsze równanie do drugiego stronami, otrzymujemy
$11r = 22$
$r = 2$

Wybieramy jedno (łatwiejsze) równanie z układu i podstawiamy w miejsce r liczbę 2.

$\begin{cases} r = 2 \\ a_1 + 2 \cdot 2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} r = 2 \\ a_1 = -3 \end{cases}$

KROK 3. Obliczamy wyraz a_{100}.
$a_{100} = a_1 + (100 - 1) \cdot r$

korzystamy ze wzoru $a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_{100} = -3 + 99 \cdot 2$
$a_{100} = -3 + 198$
$a_{100} = 195$

Odp.: $a_{100} = 195$

Zadanie 18.
Korzystamy ze wzoru
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

i mamy

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25}$

$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$

$\cos \alpha = \frac{4}{5}$ lub $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ pamiętaj, że wartości funkcji cosinus dla kątów rozwartych są zawsze ujemne!

Zatem $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Odp.: A

Zadanie 19.

Zdanie 1. Z rysunku odczytujemy, że kąt γ jest kątem zawartym między cięciwą *AC* a styczną do okręgu w punkcie *C*. Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą okręgu mamy, że kąt środkowy *AOC* jest dwa razy większy od kąta γ, zatem

$\gamma = \frac{1}{2} \cdot 135^\circ = 67,5^\circ$.

Zdanie pierwsze jest prawdziwe.

Zdanie 2. Korzystamy ze wzoru na pole wycinka koła o promieniu *r* wyznaczonego przez kąt środkowy α

$P_w = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$

Wycinek koła *AOC* wyznaczony jest przez kąt środkowy o mierze 135° i ma promień długości 8. Zatem podstawiając te dane do wzoru, otrzymujemy

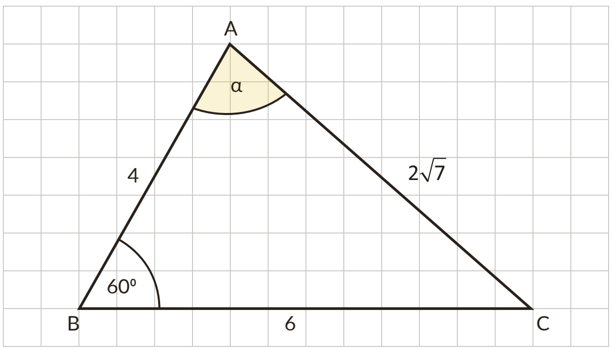
$P_w = \frac{135^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 8^2 = \frac{3}{8} \pi \cdot 64 = 24\pi$

Zdanie drugie jest prawdziwe.

Odp.: P, P

Zadanie 20.

Wykonajmy rysunek pomocniczy. Oznaczmy przez α kąt *CAB*.



Kąt trójkąta *ABC* mający największą miarę leży naprzeciw najdłuższego boku trójkąta *ABC*, czyli boku o długości 6, zatem jest to kąt α.

KROK 1. Na podstawie twierdzenia cosinusów zapisujemy równość

$6^2 = 4^2 + (2\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{7} \cdot \cos\alpha$

KROK 2 . Rozwiązujemy równanie z niewiadomą $\cos\alpha$

$36 = 16 + 28 - 16\sqrt{7} \cdot \cos\alpha$

$-8 = -16\sqrt{7} \cdot \cos\alpha$

dzielimy równanie przez $-16\sqrt{7}$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{7}}$

usuwamy niewymierność z mianownika, mnożąc licznik i mianownik przez $\sqrt{7}$.

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{14}$

KROK 3. Obliczamy pole trójkąta *ABC*. Pole trójkąta o bokach długości *a* i *b* i kącie *α* między nimi wyrażamy wzorem $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$

$P = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 60°$

$\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$P = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$P = 6\sqrt{3}$

Odp.: $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{14}$, $P = 6\sqrt{3}$

Zadanie 21.

W celu obliczenia obwodu kwadratu *ABCD* obliczmy wpierw długość jego boku *AB*. Zatem

$|AB| = \sqrt{(4-(-2))^2 + (-3-1)^2}$

korzystamy ze wzoru $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$|AB| = \sqrt{(4+2)^2 + (-4)^2}$

$|AB| = \sqrt{36+16}$

$|AB| = \sqrt{52}$

wyłączamy czynnik przed znak pierwiastka

$|AB| = \sqrt{4 \cdot 13}$

korzystamy ze wzoru $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$|AB| = 2 \cdot \sqrt{13}$

Zatem obwód kwadratu *ABCD* jest równy

$$L = 4 \cdot |AB| = 4 \cdot 2\sqrt{13} = 8\sqrt{13}$$

Odp.: C

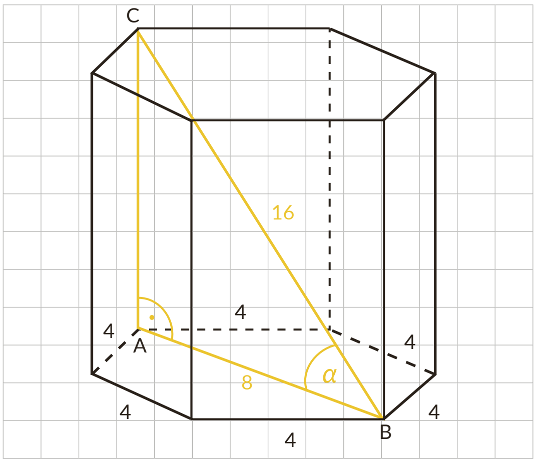
Zadanie 22.
Z równania okręgu *O* odczytujemy współrzędne jego środka jako $(-2, 3)$ oraz długość jego promienia $r = 7$.
Równanie okręgu *O* o środku (a, b) i długości promienia *r* ma postać
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
Środek okręgu symetrycznego do okręgu *O* względem osi *OY* ma współrzędne $(2, 3)$.
Współrzędne *x* punktów symetrycznych względem osi *OY* są liczbami przeciwnymi, współrzędne *y* takich punktów są takie same.

Zatem równanie okręgu symetrycznego do okręgu *O* względem osi *OY* ma postać
$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 49$.

Promienie okręgów symetrycznych mają taką samą długość.

Odp.: B, 3

Zadanie 23.
Oznaczmy przez α szukany kąt nachylenia przekątnej *d* graniastosłupa do płaszczyzny podstawy i zaznaczmy go na rysunku.



Trójkąt *ABC* jest prostokątny, a przyprostokątna przy kącie α ma długość 8.

Dłuższa przekątna każdego sześciokąta foremnego o boku długości *a* ma zawsze długość $2a$.

Korzystając z definicji funkcji cosinus, mamy

$$\cos\alpha = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

pamiętamy, że $\cos 60° = \frac{1}{2}$ lub znajdujemy tę wartość w tablicach trygonometrycznych

Zatem $\alpha = 60°$.

Odp.: D

Zadanie 24.
Oznaczmy przez V_1 objętość mniejszego ostrosłupa, zaś przez V_2 objętość większego ostrosłupa.
Szukamy skali podobieństwa większego ostrosłupa do mniejszego. Zależność między skalą podobieństwa większego ostrosłupa do mniejszego a ich objętościami wyraża wzór

$$k^3 = \frac{V_2}{V_1}$$

pamiętamy, że stosunek objętości brył podobnych w skali *k* jest równy k^3.

$$k^3 = \frac{81}{27}$$

$k^3 = 3$

„przykładamy” pierwiastek sześcienny do obu stron równania

$\sqrt[3]{k^3} = \sqrt[3]{3}$

pamiętamy, że $\sqrt[3]{a^3} = a$

$k = \sqrt[3]{3}$

Odp.: A

Zadanie 25.
Wykonajmy rysunek pomocniczy.

cyfra:	tysięcy	setek	dziesiątek	jedności
	3 możliwości	4 możliwości	4 możliwości	4 możliwości
	{4, 5, 7}	{0, 4, 5, 7}	{0, 4, 5, 7}	{0, 4, 5, 7}

Cyfrą tysięcy nie może być cyfra 0, a pozostałe cyfry liczby czterocyfrowej mogą być wybrane na 4 możliwości każda.
Kiedy skorzystamy z reguły mnożenia, liczba wszystkich liczb czterocyfrowych, w których zapisie występują wyłącznie cyfry 0, 4, 5, 7, wyniesie $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$

Odp.: C

Zadanie 26.
Doświadczenie losowe polega na losowaniu jednej skarpetki spośród $8 + n$ skarpetek. Zatem $|\Omega| = 8 + n$
Niech A oznacza zdarzenie losowe, polegające na wylosowaniu czarnej skarpetki. Czarnych skarpetek jest n, więc
$|A| = n$

Korzystając z definicji prawdopodobieństwa klasycznego

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

mamy
z treści zadania $P(A) = \frac{3}{5}$

$\frac{3}{5} = \frac{n}{8+n}$

Korzystamy w własności proporcji „mnożenia na krzyż”
$5n = 3(8 + n)$
$5n - 3n = 24$
$2n = 24$
$n = 12$

Odp.: C

Zadanie 27.
KROK 1. Obliczamy ilość wszystkich możliwych wyników losowania.
$|\Omega| = 999 - 100 + 1 = 900$

musimy ustalić, ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych naturalnych; najmniejszą z tych liczb jest 100 zaś największą 999.
lub
$|\Omega| = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$
korzystamy z reguły mnożenia

KROK 2. Oznaczmy przez A zdarzenie polegające na tym, że wylosowana liczba jest parzysta i suma jej cyfr jest równa 4.
$A = \{130, 310, 220, 400, 112, 202\}$
wypisujemy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zajściu zdarzenia A
Zatem $|A| = 6$

KROK 3. Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$P(A) = \frac{6}{900}$$

Odp.: $P(A) = \frac{1}{150}$

Zadanie 28.
Zdanie 1. Aby prawidłowo wskazać medianę danego zestawu liczb, musimy je ustawić w kolejności od najmniejszej do największej:

2000, 2000, 2000, 2000, 2000,
3000, 3000,
4000,4000,4000,<u>4000</u>,
<u>5000</u>,5000,5000,
6000, 6000, 6000, 6000, 6000, 6000, 6000,
8000

Mamy 22 pensje. Jest to liczba parzysta, zatem podkreślmy dwie środkowe pensje w tym zestawie danych. Medianę parzystej ilości liczb obliczamy jako średnią arytmetyczną dwóch środkowych liczb. Zatem

$$\frac{4000 + 5000}{2} = 4500$$

Mediana miesięcznych zarobków pracowników tej firmy jest równa 4500 zł. Zdanie pierwsze jest fałszywe.

Zdanie 2. Pojęcie dominanty określa, jaka liczba w danym zestawie liczb występuje najczęściej. Z wykresu musimy odczytać pensję, która jest wypłacana największej liczbie pracowników, zatem 7 pracowników (najwięcej w firmie) zarabia miesięcznie po 6000 zł. Pensja 6000 zł pojawia się najwięcej razy – jest to dominanta miesięcznych zarobków pracowników tej firmy. Zdanie drugie jest prawdziwe.

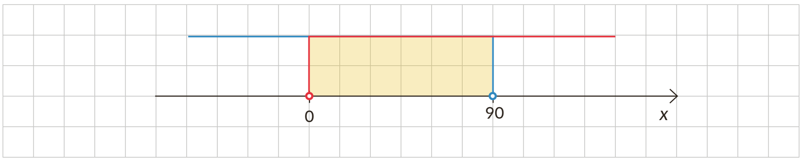
Odp.: F, P

Zadanie 29.
Plac zabaw jest w kształcie prostokąta. Zatem oznaczmy przez x i y długości boków prostokąta o obwodzie równym 180 metrów. W obliczeniach pominiemy zapis jednostek, ale przy odpowiedzi końcowej musimy o nim pamiętać.

KROK 1. Zapisujemy związek między długościami boków prostokąta.

Skoro obwód prostokąta wynosi 180, więc
$2x + 2y = 180$
obwód prostokąta to suma dwukrotności jego boków
$x + y = 90$
oraz $x > 0$, $y > 0$.
x, y oznaczają długości boków, więc muszą być liczbami dodatnimi.
Z ostatniego równania wyznaczamy jedną zmienną, np y
$y = 90 - x$.

KROK 2. Zapisujemy wzór na pole prostokąta jako funkcję jednej zmiennej oraz wyznaczamy jej dziedzinę D.
$P = x \cdot y$
pole prostokąta wyrażamy jako iloczyn długości jego boków
$P(x) = x \cdot (90 - x)$
podstawiamy w miejsce y wyrażenie $90 - x$, wyznaczone w KROKU 1.
$P(x) = -x^2 + 90x$
jest to wzór funkcji opisujący pole naszego prostokąta w zależności od długości boku x.
Każda funkcja ma swoją dziedzinę D. W KROKU 1. zapisaliśmy, że $x > 0$ i $y > 0$, ale $y = 90 - x$, więc
$90 - x > 0$
$x < 90$
Warunki $x > 0$ oraz $x < 90$ muszą zachodzić jednocześnie, więc dziedziną naszej funkcji $P(x)$ będzie część wspólna przedziałów, opisanych tymi warunkami.



Zatem dziedzina naszej funkcji jest postaci $D = (0, 90)$.

KROK 3. Obliczamy wartość argumentu x, dla którego funkcja pola ma największą wartość.
Wykresem funkcji kwadratowej $P(x)$ jest pewna część paraboli o ramionach skierowanych w dół.
współczynnik $a = -1 < 0$

W takim przypadku funkcja $P(x)$ może przyjmować wartość największą dla argumentu, będącego pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, czyli dla

$$x = \frac{-90}{2 \cdot (-1)} = 45$$

pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli $x_w = -\frac{b}{2a}$

KROK 4. Obliczamy długość drugiego boku prostokąta oraz największe pole prostokąta.
Skoro $x = 45 \in (0, 90)$, więc funkcja $P(x)$ osiąga wartość największą dla argumentu $x = 45$. Zatem obliczamy teraz długość drugiego boku prostokąta

$y = 90 - x = 90 - 45 = 45$

oraz obliczamy największe pole prostokąta

$P(45) = -45^2 + 90 \cdot 45 = -2025 + 4050 = 2025$.
Korzystamy ze wzoru funkcji $P(x) = -x^2 + 90x$

Odp.: Największa powierzchnia placu zabaw jest równa 2025 m^2 przy wymiarach 45 m × 45 m, czyli plac zabaw jest w kształcie kwadratu o boku długości 45 metrów.