KLUCZ

Nr zadania	Odpowiedź	Schemat punktowania
1.	D	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
2.	B	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
3.	B	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
4.	A	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
5.	A, E	**2 pkt** – dwie odpowiedzi poprawne. **1 pkt** – jedna odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
6.	$k=-5$	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
7.	A	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
8.	D	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
9.	ocenia egzaminator	**2 pkt** – zapisanie podanej liczby w postaci $9\cdot 3\cdot 4^{96}$ oraz sformułowanie odpowiedniego wniosku. **1 pkt** – zapisanie podanej liczby w postaci $9\cdot 3\cdot 4^{96}$. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
10.1.	Funkcja $f(x)$ jest malejąca dla $x\in(-\infty;2\frac{1}{2}\rangle$, a rosnąca dla $x\in\langle 2\frac{1}{2};+\infty)$.	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
10.2.	$f(x)=x^2-5x-6$	**3 pkt** – zapisanie wzoru funkcji w postaci ogólnej $f(x)=x^2-5x-6$. **2 pkt** – wyznaczenie współczynnika $a=1$. **1 pkt** – zapisanie wzoru funkcji w postaci kanonicznej $f(x)=a\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
10.3.	A	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
11.	B	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
12.	Zmieszano 11,25 litra roztworu dziesięcioprocentowego i 3,75 litra roztworu osiemnastoprocentowego.	**2 pkt** – odpowiedź poprawna. **1 pkt** – wyznaczenie odpowiedniego układu równań/równania, pozwalającego na poprawne rozwiązanie zadania. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Nr zadania	Odpowiedź	Schemat punktowania
13.1.	$f(n) =$ $= 800000 \cdot (1{,}005)^n$	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
13.2.	A	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
14.	C	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
15.	P, F	**1 pkt** – odpowiedź poprawna (obie odpowiedzi muszą być poprawne). **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
16.	B	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
17.	Takich liczb jest 100.	**2 pkt** – za prawidłowe podanie cyfry setek, dziesiątek i jedności oraz liczby możliwości. **1 pkt** – za prawidłowe podanie cyfry setek, dziesiątek i jedności lub liczby możliwości. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
18.1.	A	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
18.2.	C	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
19.	D	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
20.	D	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
21.	A, 2	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
22.	C	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
23.	B	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
24.1.	F, F	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
24.2.	$\{-5; -2\}$	**2 pkt** – podanie poprawnej odpowiedzi. **1 pkt** – rozwiązanie podanego równania. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
25.	9	**2 pkt** – podanie poprawnej odpowiedzi $n = 9$. **1 pkt** – zapisanie równania, które pozwoli obliczyć n. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
26.1.	$z(x) = -100x^2 + 4600x - 36000$ $D_z = \langle 10;36 \rangle$	**2 pkt** – poprawne rozwiązanie – wyznaczenie wzoru funkcji. **1 pkt** – wprowadzenie odpowiedniej zmiennej, pozwalającej wyznaczyć szukany wzór funkcji. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Nr zadania	Odpowiedź	Schemat punktowania
26.2.	Roczny zysk będzie największy, gdy cena będzie równa 23 zł. Wielkość sprzedaży to 1300 szt. Roczny zysk przy cenie 23 zł to 16 900 zł.	**2 pkt** – podanie pełnej, poprawnej odpowiedzi. **1 pkt** – wyznaczenie ceny, dla której roczny zysk będzie największy. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
27.	P, F	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
28.	$V=\frac{a^3\cdot tg\alpha}{12}$	**3 pkt** – poprawna odpowiedź – obliczenie objętości ostrosłupa. **2 pkt** – wyznaczenie długości wysokości H ostrosłupa **1 pkt** – wyznaczenie długości odcinka łączącego spodek wysokości ostrosłupa z wierzchołkiem przy podstawie. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

ROZWIĄZANIA

Zadanie 1.

Korzystamy ze wzorów: $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $a^x : a^y = a^{x-y}$.

$$\frac{(5^2)^4\cdot 5^{-3}:5^4}{5^{-2}}=\frac{5^{2\cdot 4}\cdot 5^{-3}:5^4}{5^{-2}}=\frac{5^8\cdot 5^{-3}:5^4}{5^{-2}}=\frac{5^{8+(-3)-4}}{5^{-2}}=\frac{5^1}{5^{-2}}=5^{1-(-2)}=5^3=125$$

Odp.: D

Zadanie 2.

Korzystamy ze wzorów: $\log_a x+\log_a y=\log_a(x\cdot y)$, $\log_a x-\log_a y=\log_a(x:y)$.

$$\log_4 20+\log_4 2-\log_4 2{,}5=\log_4(20\cdot 2:2{,}5)=\log_4 16=2$$

Odp.: B

Zadanie 3.

Wyznaczamy zbiór zdarzeń możliwych do uzyskania przy trzykrotnym rzucie monetą.

$\Omega=\{(O,O,O),(O,O,R),(O,R,O),(R,O,O),(O,R,R),(R,O,R),(R,R,O),(R,R,R)\}$
$|\Omega|=8$

Wyznaczamy zbiór zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia polegającego na wyrzuceniu orła co najmniej dwa razy (czyli dwa lub trzy razy).

$A=\{(O,O,O),(O,O,R),(O,R,O),(R,O,O)\}$
$|A|=4$

Obliczamy prawdopodobieństwo:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$$

$P(A) = \frac{4}{8}$

$P(A) = \frac{1}{2}$

Odp.: B

Zadanie 4.

Wiemy, że $|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

Zatem opuszczając symbol wartości bezwzględnej, musimy najpierw ustalić, czy w danym przedziale (–3;5) wyrażenie ma wartość ujemną czy nieujemną.

Mamy więc dla $x \in (-3;5)$:

$x + 4 > 0$

$x - 6 < 0$

$-5 + x < 0$

$x + 3 > 0$

Tam, gdzie wyrażenie w danym przedziale ma wartość ujemną, opuszczając symbol wartości bezwzględnej, zmieniamy znak na przeciwny.

Stąd:

$$|x + 4| + |x - 6| + 2\,|-5 + x| - |x + 3| = (x + 4) + (-x + 6) + 2\,(5 - x) - (x + 3) =$$
$$= x + 4 - x + 6 + 10 - 2x - x - 3 = -3x + 17$$

Odp.: A

Zadanie 5.

Trójkąty *ABC* i *DBE* mają takie same odpowiednie kąty, więc są podobne.

Zatem zachodzi: $\frac{|AC|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|BD|}$ oraz $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BD|}{|BE|}$.

Odp.: A, E

Zadanie 6.

Ponieważ (–1) jest pierwiastkiem wielomianu, to $W(-1) = 0$. Mamy więc:

$-6 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - k \cdot (-1) + 7 + 2k = 0$

$-6 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 - k \cdot (-1) + 7 + 2k = 0$

$6 + 2 + k + 7 + 2\,k = 0$

$15 + 3k = 0$

$3k = -15$

$k = -5$

Odp.: $k = -5$

Zadanie 7.
Ustalamy dziedzinę wyrażenia.

W mianowniku nie może być zera, czyli
$(x+2)\left(2-\frac{1}{2}x\right)\neq 0$

Stąd:
$x+2\neq 0$ i $2-\frac{1}{2}x\neq 0$
$x\neq -2$ i $x\neq 4$

Zatem $D=\mathbb{R}\setminus\{-2,4\}$
Wyrażenie $\frac{x(3x+6)(x^2-9)(2x-8)}{(x+2)\left(2-\frac{1}{2}x\right)}=0$ będzie równe zero, jeśli jego licznik będzie równy zero.

$x(3x+6)(x^2-9)(2x-8)=0$

Stąd:
$x=0$ lub $3x+6=0$ lub $x^2-9=0$ lub $2x-8=0$

$x=0$ lub $3x=-6$ lub $(x-3)(x+3)=0$ lub $2x=8$

$x=0$ lub $x=-2$ lub $x=3$ lub $x=-3$ lub $x=4$

Rozwiązaniami równania są tylko te liczby, które należą do dziedziny danego wyrażenia wymiernego.
Musimy zatem wykluczyć $x=-2$ i $x=4$.

Rozwiązaniami równania $\frac{x(3x+6)(x^2-9)(2x-8)}{(x+2)\left(2-\frac{1}{2}x\right)}=0$ są więc liczby $x=0$, $x=3$, $x=-3$.

Odp.: A

Zadanie 8.
Ponieważ rozwiązaniem ma być przedział domknięty obustronnie, to musi być to nierówność $|x-a|\leq b$, więc prawidłowa jest odpowiedź C lub D.

Liczba, która zeruje wyrażenie znajdujące się w symbolu wartości bezwzględnej jest środkiem przedziału, który jest rozwiązaniem. Środkiem przedziału $\langle -11;5\rangle$ jest liczba -3. Zatem prawidłowa jest odpowiedź D.

Odp.: D

Zadanie 9.
Musimy przedstawić dane wyrażenie jako iloczyn liczby 9 i pewnej liczby naturalnej.

$$4^{98}+2\cdot 4^{97}+3\cdot 4^{96}=4^2\cdot 4^{96}+2\cdot 4^1\cdot 4^{96}+3\cdot 4^{96}=16\cdot 4^{96}+8\cdot 4^{96}+3\cdot 4^{96}=4^{96}(16+8+3)=4^{96}\cdot 27=4^{96}\cdot 3\cdot 9$$

Przekształciliśmy zatem wyrażenie $4^{98}+2\cdot 4^{97}+3\cdot 4^{96}$ do postaci $4^{96}\cdot 3\cdot 9$, czyli do iloczynu liczby 9 i liczby naturalnej $4^{96}\cdot 3$.

Zadanie 10.1.
Ponieważ funkcja kwadratowa $f(x)$ osiąga wartość minimalną równą $-12\frac{1}{4}$ dla argumentu $2\frac{1}{2}$, to znaczy, że parabola będąca wykresem tej funkcji ma wierzchołek w punkcie $\left(2\frac{1}{2};-12\frac{1}{4}\right)$ i ramiona skierowane do góry.

Odp.: Zatem funkcja $f(x)$ jest malejąca dla $x \in (-\infty;2\frac{1}{2}\rangle$, a rosnąca dla $x \in \langle 2\frac{1}{2};+\infty)$.

Zadanie 10.2.
Wiemy, że parabola będąca wykresem tej funkcji ma wierzchołek w punkcie $\left(2\frac{1}{2};-12\frac{1}{4}\right)$, więc zapiszemy wzór w postaci kanonicznej:

$$f(x) = a\left(x-2\frac{1}{2}\right)^2-12\frac{1}{4}$$

Współczynnik a wyznaczymy, podstawiając do powyższego wzoru współrzędne punktu przecięcia paraboli z osią y, czyli $(0, -6)$.

$$-6=a\left(0-2\frac{1}{2}\right)^2-12\frac{1}{4}$$

$$-6=a\left(-\frac{5}{2}\right)^2-12\frac{1}{4}$$

$$-6=\frac{25}{4}a-12\frac{1}{4}$$

$$\frac{25}{4}a=6\frac{1}{4}$$

$$\frac{25}{4}a=\frac{25}{4}$$

$$a=1$$

Mamy zatem wzór w postaci kanonicznej:

$$f(x) = \left(x-2\frac{1}{2}\right)^2-12\frac{1}{4}$$

Przekształcamy go do postaci ogólnej:

$$f(x) = \left(x-\frac{5}{2}\right)^2-12\frac{1}{4}$$

$$f(x) = x^2-5x+\frac{25}{4}-12\frac{1}{4}$$

$$f(x) = x^2-5x+6\frac{1}{4}-12\frac{1}{4}$$

Odp.: $f(x) = x^2 - 5x - 6$

Zadanie 10.3.
Miejsca zerowe możemy obliczyć na podstawie wzoru ogólnego funkcji, który wyznaczyliśmy w poprzednim podpunkcie.

$f(x) = x^2 - 5x - 6$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$

$\Delta = 25 + 24$

$\Delta = 49$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \cdot 1}$

$x_1 = \dfrac{5 - 7}{2}$

$x_1 = -1$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \dfrac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \cdot 1}$

$x_2 = \dfrac{5 + 7}{2}$

$x_2 = 6$

Zatem miejsca zerowe to -1 i 6.

Można również wybrać prawidłową odpowiedź bez wykonywania obliczeń.

Pierwsza współrzędna wierzchołka jest średnią arytmetyczną miejsc zerowych, czyli $x_w = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

Ponieważ $x_w = 2\dfrac{1}{2}$, to powyższy warunek spełnia para liczb, która jest w odpowiedzi A.

Odp.: A

Zadanie 11.
Aby wykres funkcji $g(x)$ był prostopadły do wykresu funkcji $f(x)$ współczynnik kierunkowy funkcji $g(x)$ musi być odwrotny i przeciwny do współczynnika kierunkowego funkcji $f(x)$, czyli do 2.

Zatem $g(x) = -\dfrac{1}{2}x + b$.

Aby wyznaczyć wartość b, podstawiamy współrzędne podanego punktu (4;1).
Mamy:

$1 = -\dfrac{1}{2} \cdot 4 + b$

$1 = -2 + b$

$b = 3$

Zatem $g(x) = -\dfrac{1}{2}x + 3$.

Odp.: B

Zadanie 12.
Oznaczymy:
x – masa roztworu dziesięcioprocentowego
y – masa roztworu osiemnastoprocentowego

Ponieważ po zmieszaniu otrzymujemy 15 litrów roztworu dwunastoprocentowego, to jedno z równań ma postać: $x + y = 15$.

Drugie równanie otrzymamy, przyrównując masy substancji w poszczególnych roztworach. Masę substancji wyznacza się, mnożąc stężenie procentowe przez masę całego roztworu.

Mamy więc drugie równanie:
$10\%x + 18\%y = 12\% \cdot 15$

Rozwiązujemy więc układ równań:

$$\begin{cases} 10\%x + 18\%y = 12\% \cdot 15 \\ x + y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}1x + 0{,}18y = 1{,}8 \\ x + y = 15 \end{cases}$$

Mnożymy pierwsze równanie przez (–10), a następnie dodajemy równania stronami.

$$\begin{cases} -x - 1{,}8y = -18 \\ x + y = 15 \end{cases}$$

$-x - 1{,}8y + x + y = -18 + 15$
$-0{,}8y = -3$
$y = 3{,}75$

Z drugiego równania wyznaczamy x.
$x + 3{,}75 = 15$
$x = 11{,}25$

Odp.: Zmieszano 11,25 litra roztworu dziesięcioprocentowego i 3,75 litra roztworu osiemnastoprocentowego.

Zadanie 13.1.
Z każdym rokiem przyrost zwiększa się o 0,5%, czyli wynosi 100,5% poprzedniego roku.

Odp.: Po n latach mamy więc $f(n) = 800000 \cdot (1{,}005)^n$

Zadanie 13.2.
Podstawiając do wzoru z poprzedniego podpunktu w miejsce n liczbę 3, otrzymujemy:
$f(3) = 800000 \cdot (1{,}005)^3 = 812060{,}1$

Można także nie korzystać z poprzedniego podpunktu i wyznaczać ilość mieszkańców na koniec każdego kolejnego roku, czyli:

Koniec 2023 to $800000 \cdot 1{,}005 = 804000$
Koniec 2024 to $804000 \cdot 1{,}005 = 808020$
Koniec 2025 to $808020 \cdot 1{,}005 = 812060{,}1$

Odp.: A

Zadanie 14.
Jeden rok to cztery kwartały.
Kapitalizacja odsetek następuje co kwartał, zatem w ciągu 5 lat kapitalizacja nastąpi 20 razy.
Oprocentowanie roczne wynosi 3%, zatem oprocentowanie kwartalne wyniesie 3%: 4 = 0,75%.

Odp.: C

Zadanie 15.
$a_n = 2n - 7,\ n \geq 1$

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego to $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, więc

$S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5$

Obliczymy a_1 i a_5.
$a_1 = 2 \cdot 1 - 7$
$a_1 = -5$
$a_5 = 2 \cdot 5 - 7$
$a_5 = 3$
Zatem
$S_5 = \frac{-5+3}{2} \cdot 5$
$S_5 = \frac{-2}{2} \cdot 5$
$S_5 = -5$
Zatem pierwsze zdanie jest prawdziwe.

Obliczymy dziewiąty wyraz ciągu. W podanym wzorze w miejsce n wstawiamy 9.
$a_9 = 2 \cdot 9 - 7$
$a_9 = 18 - 7$
$a_9 = 11$
Zatem drugie zdanie jest fałszywe.

Odp.: P, F

Zadanie 16.
Równanie okręgu ma postać $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, gdzie $(a; b)$ to współrzędne środka tego okręgu.
Odczytujemy środki danych okręgów: $S_1 = (3; -2)$, $S_2 = (-1;1)$

Odległość między punktami S_1 i S_2 wyznaczamy ze wzoru $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

$d = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-(-2))^2}$

$d = \sqrt{(-4)^2 + 3^2}$

$d = \sqrt{16+9}$

$d = \sqrt{25}$
$d = 5$

Odp.: B

Zadanie 17.
Na pierwszym miejscu (cyfra setek) mogą być cztery cyfry: 2, 4, 6, 8.
Na drugim miejscu (cyfra dziesiątek) może być pięć cyfr: 1, 3, 5, 7, 9.
Na trzecim miejscu (cyfra jedności) może być pięć cyfr: 0, 2, 4, 6, 8.

Korzystając z reguły mnożenia, mamy $4 \cdot 5 \cdot 5$ możliwości, czyli takich liczb jest 100.

Odp.: 100 liczb

Zadanie 18.1.
Przekształcamy równanie prostej *l*.
$l\colon mx = 8 - y$
$l\colon y = -mx + 8$
Mamy więc:
$k\colon y = 3x + 2$
$l\colon y = -mx + 8$

Proste będą równoległe, jeśli ich współczynniki kierunkowe będą takie same.
Stąd:
$3 = -m$
$m = -3$

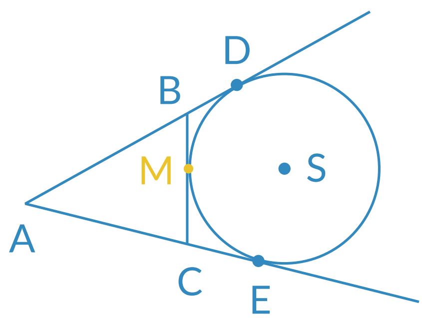
Odp.: A

Zadanie 18.2.
$k\colon y = 3x + 2$
$l\colon y = -mx + 8$ $l\colon y = -mx + 8$

Proste będą prostopadłe, jeśli współczynnik kierunkowy jednej będzie odwrotny i przeciwny do współczynnika kierunkowego drugiej. Inaczej – iloczyn współczynników kierunkowych będzie równy (–1).
Stąd:
$$-m = -\frac{1}{3}$$
$$m = \frac{1}{3}$$

Odp.: C

Zadanie 19.
Zaznaczymy na rysunku punkt M, będący punktem styczności prostej zawierającej odcinek *BC* z okręgiem.



Zauważmy, że:
$$|AD| = |AE| = 20$$
$$|CM| = |CE|$$
$$|BM| = |BD|$$

Boki trójkąta *ABC* możemy zapisać następująco:

$|AB| = |AD| - |BD|$, czyli $|AB| = 20 - |BD|$

$|AC| = |AE| - |CE|$, czyli $|AC| = 20 - |CE|$

$|BC| = |BM| + |CM|$, czyli $|BC| = |BD| + |CE|$

Zatem:
Obwód $\Delta\ ABC = |AB| + |AC| + |BC| = 20 - |BD| + 20 - |CE| + |BD| + |CE| = 40$

Odp.: D

Zadanie 20.
Przekształcimy dane wyrażenie, korzystając z jedynki trygonometrycznej, czyli $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

oraz zależności $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Mamy więc:

$$\frac{2}{\cos^2\alpha} - 1 - 2\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{2-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - 2\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{2-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - 2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{2-\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2-\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2-(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{2-1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1$$

Odp.: D

Zadanie 21.
Jeżeli bryły są podobne w skali k to krawędzie jednej są k razy większe/mniejsze od odpowiednich krawędzi drugiej, pole jednej jest k^2 razy większe/mniejsze od pola drugiej, natomiast objętość jednej jest k^3 razy większa/mniejsza od objętości drugiej.

Wiemy, że pole powierzchni drugiego prostopadłościanu jest cztery razy mniejsze od pola powierzchni pierwszego,

czyli $P_2 = \frac{1}{4}P_1$.

Zatem

$k^2 = \frac{1}{4}$

Stąd

$k = \frac{1}{2}$

$k^3 = \frac{1}{8}$

Mamy więc: $V_2 = \frac{1}{8}V_1$

Odp.: A, 2

Zadanie 22.
Trójkąt *AOB* jest równoramienny (długości ramion są równe długości promienia okręgu), więc

$$|\angle OBA| = |\angle OAB| = \frac{180^\circ - (60^\circ + 40^\circ)}{2} = 40^\circ.$$

Trójkąt *COB* jest równoramienny (długości ramion są równe długości promienia okręgu), więc

$$|\angle OCB| = |\angle OBC| = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Trójkąt *AOC* jest równoramienny (długości ramion są równe długości promienia okręgu), więc

$$|\angle OAC| = |\angle OCA| = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ.$$

Wyznaczymy kąty trójkąta *ABC*.

$|\angle CAB| = |\angle OAC| - |\angle OAB|$
$|\angle CAB| = 70^\circ - 40^\circ$
$|\angle CAB| = 30^\circ$

$|\angle ABC| = |\angle OBC| - |\angle OBA|$
$|\angle ABC| = 60^\circ - 40^\circ$
$|\angle ABC| = 20^\circ$

$|\angle ACB| = |\angle OCA| + |\angle OCB|$
$|\angle ACB| = 70^\circ + 60^\circ$
$|\angle ACB| = 130^\circ$

Odp.: C

Zadanie 23.
Zaznaczony przekrój jest trójkątem równobocznym, którego każdy bok jest równocześnie przekątną jednej ze ścian sześcianu.
Ściany sześcianu są kwadratami o długości krawędzi 3 dm. Zatem długość boku trójkąta będącego przekrojem jest równa $3\sqrt{2}$ dm.

Skorzystamy ze wzoru na pole trójkąta równobocznego o boku długości *a*: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Mamy więc:

$$P = \frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$P = \frac{18\sqrt{3}}{4}$$

$$P = \frac{9\sqrt{3}}{2}\ dm^2$$

Odp.: B

Zadanie 24.1.
Rozwiązujemy nierówność kwadratową

$$-3x^2 + 7x - 2 \geq 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 7^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-2)$

$\Delta = 49 - 24$

$\Delta = 25$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-7-\sqrt{25}}{2\cdot(-3)}$

$x_1 = \frac{-7-5}{-6}$

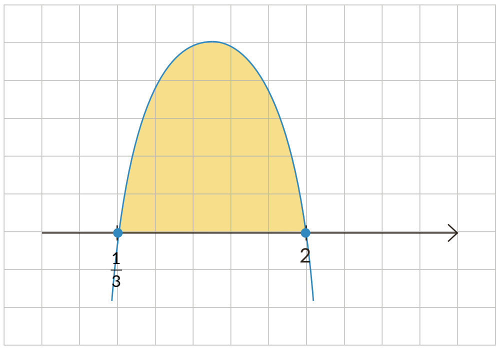
$x_1 = 2$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-7+\sqrt{25}}{2\cdot(-3)}$

$x_2 = \frac{-7+5}{-6}$

$x_2 = \frac{1}{3}$



Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $\langle \frac{1}{3}; 2 \rangle$.

Najmniejsza liczba całkowita należąca do tego przedziału to 1, więc pierwsze zdanie jest fałszywe. Wszystkie liczby całkowite należące do zbioru rozwiązań nierówności to: 1 i 2, czyli są dwie takie liczby, więc drugie zdanie również jest fałszywe.

Odp.: F, F

Zadanie 24.2.
Wyznaczamy rozwiązania równania $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2-4)\left(x-\frac{1}{3}\right)^2(x+5)=0$

$x-\frac{1}{2}=0$ lub $x^2-4=0$ lub $x-\frac{1}{3}=0$ lub $x+5=0$

$x=\frac{1}{2}$ lub $x=-2$ lub $x=2$ lub $x=\frac{1}{3}$ lub $x=-5$

Rozwiązania równania to $\left\{-5;-2;\frac{1}{3};\frac{1}{2};2\right\}$.

Sprawdzamy, które z rozwiązań równania nie należą do przedziału $\langle \frac{1}{3}; 2 \rangle$.

Odp.: Są to liczby: $\{-5; -2\}$.

Zadanie 25.
n – kule czarne, 1 – kula biała

Wszystkich kul jest $n + 1$. Losujemy dwa razy bez zwracania, więc

$|\Omega| = (n + 1) \cdot n$

Zdarzenie A polega na wylosowaniu dwóch kul czarnych, więc

$|A| = n \cdot (n - 1)$

Mamy:

$P(A) = \frac{4}{5}$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$P(A) = \frac{n \cdot (n-1)}{(n+1) \cdot n}$

Zatem:

$\frac{n \cdot (n-1)}{(n+1) \cdot n} = \frac{4}{5}$

Skracamy n:

$\frac{n-1}{n+1} = \frac{4}{5}$

Mnożymy „na krzyż":

$5(n - 1) = 4(n + 1)$

$5n - 5 = 4n + 4$

$5n - 4n = 4 + 5$

$n = 9$

Odp.: Czarnych kul jest 9.

Zadanie 26.1.
Zysk jest to iloczyn ceny pomniejszonej o koszt produkcji jednej sztuki i ilości sprzedanych sztuk.

x – cena za sztukę

Funkcja, opisująca roczny zysk w zależności od ceny za sztukę, to

$z(x) = (x - 10)\,[2000 - (x - 16) \cdot 100]$

$z(x) = (x - 10)\,[2000 - 100x + 1600]$

$z(x) = (x - 10)(3600 - 100x)$

$z(x) = -100x^2 + 4600x - 36000$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji $z(x)$:

$x-10\geq 0$, czyli $x\geq 10$

$3600-100x\geq 0$, czyli $x\leq 36$

Mamy więc:

$D_z=\langle 10;36\rangle$

Odp.: $z(x) = -100x^2 + 4600x - 36000$, $D_z=\langle 10;36\rangle$

Zadanie 26.2.
Funkcja $z(x) = -100x^2 + 4600x - 36000$ jest funkcją kwadratową, której wykresem jest parabola o ramionach skierowanych do dołu. Zatem wartość największą osiąga ona w wierzchołku.

$$x_w=\frac{-b}{2a}$$

$$x_w=\frac{-4600}{2\cdot(-100)}$$

$$x_w=23$$

$$23\in\langle 10;36\rangle$$

Roczny zysk będzie największy, gdy cena będzie równa 23 zł.

Wielkość sprzedaży to $2000 - (23 - 16) \cdot 100 = 2000 - 700 = 1300$, czyli 1300 szt.

Odp.: Roczny zysk przy cenie 23 zł to $(23 - 10)[2000 - (23 - 16) \cdot 100] = 13 \cdot 1300 = 16900$, czyli 16900 zł.

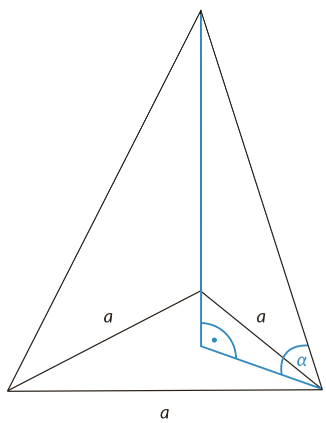
Zadanie 27.
Wyznaczamy średnią płacę: $\dfrac{0,5\cdot 2000+0,3\cdot 3000+0,15\cdot 4000+0,05\cdot 6000}{0,5+0,3+0,15+0,05}=2800$

Zatem pierwsze zdanie jest prawdziwe.

Drugie zdanie jest fałszywe, ponieważ tylko 50% pracowników zarabia powyżej średniej, a 50% zarabia 2000, czyli poniżej średniej.

Odp.: P, F

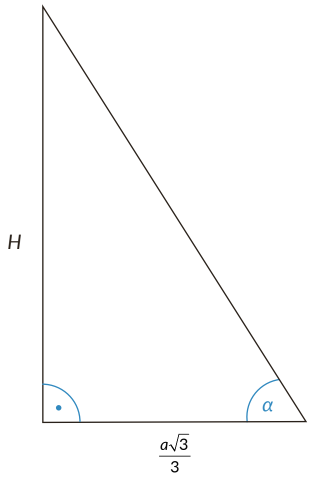
Zadanie 28.
Zaznaczamy dane na rysunku.



Odcinek łączący spodek wysokości z wierzchołkiem przy podstawie ma długość $\frac{2}{3}$ wysokości trójkąta równobocznego będącego podstawą ostrosłupa. Wyznaczamy jego długość, korzystając ze wzoru na długość wysokości trójkąta równobocznego:

$$\frac{2}{3}h_{\Delta}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Znajdziemy długość wysokości H ostrosłupa.



$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{H}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\mathrm{tg}\alpha=H$$

$$H=\frac{a\sqrt{3}\cdot\mathrm{tg}\alpha}{3}$$

Obliczamy objętość ostrosłupa.

$V=\frac{1}{3}\cdot P_p\cdot H$, gdzie $P_p=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}\cdot\mathrm{tg}\alpha}{3}$$

Odp.: $V=\frac{a^3\cdot tg\alpha}{12}$