KLUCZ

Nr zadania	Odpowiedź	Schemat punktowania
1.	C	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
2.	B	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
3.	C	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
4.	A	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
5.	B, E	**2 pkt** – dwie poprawne odpowiedzi. **1 pkt** – tylko jedna poprawna odpowiedź. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
6.	$\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 4\right\}$	**3 pkt** – poprawne rozwiązanie równania. **2 pkt** – przyrównanie do zera otrzymanych dwóch czynników. **1 pkt** – zapisanie równania w postaci iloczynowej. **0 pkt** – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.
7.	A	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
8.	długość boków prostokąta to 3 i 5	**3 pkt** – zastosowanie poprawnej metody i wyznaczenie długości obydwu boków tego prostokąta. **2 pkt** – poprawne wyznaczenie długości jednego z boków tego prostokąta. **1 pkt** – wyznaczenie związku między bokami danego prostokąta, pozwalającego na poprawne rozwiązanie zadania. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
9.1.	F, F	**1 pkt** – odpowiedź poprawna (obie odpowiedzi muszą być poprawne). **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi
9.2.	Funkcja jest rosnąca dla $x \in \langle -7;-4\rangle$ oraz dla $x \in \langle 3;6\rangle$. Funkcja jest malejąca dla $x \in \langle -4;-2\rangle$ oraz dla $x \in \langle 1;3\rangle$ oraz dla $x \in \langle 6;8\rangle$. Funkcja jest stała dla $x \in \langle -2;1\rangle$.	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
9.3.	C	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
10.	D	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Nr zadania	Odpowiedź	Schemat punktowania
11.1.	A, D	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
11.2.	Prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek, których iloczyn jest liczbą parzystą, wynosi $\frac{3}{4}$.	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
12.1.	D	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
12.2.	B	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
13.1.	C	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
13.2.	Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu $a_n = \frac{6^n}{12}$ dla $n \in \mathbb{N}_+$ jest równa 777,5.	**2 pkt** – obliczenie sumy pięciu początkowych wyrazów tego ciągu. **1 pkt** – wyznaczenie pierwszego wyrazu a_1 oraz ilorazu q tego ciągu. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
14.	P, F	**1 pkt** – odpowiedź poprawna (obie odpowiedzi muszą być poprawne). **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
15.1.	C, 2	**1 pkt** – odpowiedź poprawna (obie odpowiedzi muszą być poprawne). **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
15.2.	A	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
15.3.	C	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
16.	D	**1 pkt** – odpowiedź poprawna (obie odpowiedzi muszą być poprawne). **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
17.	B	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
18.	P, P	**1 pkt** – odpowiedź poprawna (obie odpowiedzi muszą być poprawne). **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
19.	trzeci bok trójkąta – 6 cm	**2 pkt** – odpowiedź poprawna – wyznaczenie trzeciego boku trójkąta. **1 pkt** – zapisanie poprawnej równości wynikającej z tw. cosinusów, pozwalającej wyznaczyć długość trzeciego boku. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
20.	Cosinus kąta *BSM* jest równy $\frac{1}{3}$.	**3 pkt** – podanie poprawnej odpowiedzi – wyznaczenie cosinusa kąta *BSM*. **2 pkt** – obliczenie długości boku *SM*. **1 pkt** – wprowadzenie odpowiednich oznaczeń i zapisanie zależności, pozwalającej obliczyć długość boku *SM*. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Nr zadania	Odpowiedź	Schemat punktowania
21.	Wymiary albumu: 22 cm i 20 cm.	**3 pkt** – odpowiedź poprawna. **2 pkt** – zapisanie odpowiedniego wzoru funkcji, pozwalającego wyznaczyć poprawną odpowiedź. **1 pkt** – zapisanie związku pomiędzy zmiennymi. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
22.1.	C	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
22.2.	D	**1 pkt** – odpowiedź poprawna. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
23.	Objętość danego ostrosłupa jest równa $48\sqrt{7}$.	**3 pkt** – odpowiedź poprawna. **2 pkt** – wyznaczenie długości wysokości ostrosłupa. **1 pkt** – wyznaczenie długości przekątnej podstawy ostrosłupa. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
24.	$4(4n^2 + 6n + 1) + 3$	**2 pkt** – zapisanie podanej liczby w postaci $4(4n^2 + 6n + 1) + 3$ oraz sformułowanie odpowiedniego wniosku. **1 pkt** – zapisanie podanej liczby w postaci $4(4n^2 + 6n + 1) + 3$. **0 pkt** – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

ROZWIĄZANIA

Zadanie 1.
Skorzystamy ze wzoru $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$ oraz $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$$\left(8^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 9^{-1}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{8} + 3 \cdot \frac{1}{9}\right)^2 = \left(2 + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(2\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9} = 5\frac{4}{9}$$

Odp.: C

Zadanie 2.
Skorzystamy ze wzoru $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$

$$2\log_6 36 + \frac{1}{3}\log 1000 - \log_2 \frac{1}{2} = 2 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 - (-1) = 4 + 1 + 1 = 6$$

Odp.: B

Zadanie 3.
Liczba jest podzielna przez 5, jeżeli ostatnia cyfra jest równa 0 lub 5.

Na pierwszym miejscu (cyfra setek) może być dziewięć cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Na drugim miejscu (cyfra dziesiątek) może być dziesięć cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Na trzecim miejscu (cyfra jedności) mogą być dwie cyfry: 0,5.

Korzystając z reguły mnożenia, mamy $9 \cdot 10 \cdot 2$ możliwości, czyli takich liczb jest 180.

Odp.: C

Zadanie 4.

$x \neq 2$

$$\frac{4}{x-2}+3=\frac{4+3(x-2)}{x-2}=\frac{4+3x-6}{x-2}=\frac{3x-2}{x-2}$$

Odp.: A

Zadanie 5.

Wykorzystamy wzory skróconego mnożenia: $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

$4 - (4a^2 - 4ab + b^2) = 2^2 - (2a - b)^2 = [2 - (2a - b)][2 + (2a - b)] = [2 + (b - 2a)][2 - (b - 2a)]$

Odp.: B, E

Zadanie 6.

$4x^3 - 16x^2 - 2x + 8 = 0$

$4x^2 (x - 4) - 2 (x - 4) = 0$

$(4x^2 - 2) (x - 4) = 0$

$4x^2 - 2 = 0$ lub $x - 4 = 0$

$4x^2 = 2$ lub $x = 4$

$x^2 = \frac{1}{2}$ lub $x = 4$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ lub $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ lub $x = 4$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = 4$

Odp.: Zbiór rozwiązań równania to $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 4\right\}$.

Zadanie 7.

Ustalamy dziedzinę wyrażenia.

W mianowniku nie może być zera, czyli $x^2 - 4 \neq 0$

Stąd:

$(x+2)(x-2) \neq 0$

$x + 2 \neq 0$ i $x - 2 \neq 0$

$x \neq -2$ i $x \neq 2$

Zatem $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

Wyrażenie $\frac{x(x-10)(x+5)^2(x+2)}{x^2-4}$ będzie równe zero, jeśli jego licznik będzie równy zero.

$x(x-10)(x+5)^2(x+2) = 0$

$x = 0$ lub $x - 10 = 0$ lub $x + 5 = 0$ lub $x + 2 = 0$

$x = 0$ lub $x = 10$ lub $x = -5$ lub $x = -2$

Rozwiązaniami równania są tylko te liczby, które należą do dziedziny danego wyrażenia wymiernego.

Musimy zatem wykluczyć $x = -2$.

Rozwiązaniami równania $\frac{x(x-10)(x+5)^2(x+2)}{x^2-4} = 0$ są więc liczby $x = -5$, $x = 0$, $x = 10$.

Odp.: A

Zadanie 8.
Oznaczmy x, y – boki prostokąta, gdzie $x > 0$, $y > 0$.

Pole prostokąta obliczamy ze wzoru $P = xy$.

Mamy zatem układ równań:

$$\begin{cases} (x+2)(y+2) = xy + 20 \\ 2x \cdot 2y = xy + 45 \end{cases}$$

Uporządkujemy równania:

$$\begin{cases} xy + 2x + 2y + 4 = xy + 20 \\ 4xy = xy + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 16 \\ 3xy = 45 \end{cases}$$

Pierwsze równanie dzielimy przez 2, a drugie przez 3:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy niewiadomą y i podstawiamy do drugiego równania:

$$\begin{cases} y = 8 - x \\ x(8 - x) = 15 \end{cases}$$

Rozwiązujemy drugie równanie:

$x(8 - x) = 15$

$8x - x^2 = 15$

$-x^2 + 8x - 15 = 0$

Dla ułatwienia obliczeń mnożymy równanie przez (–1):

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15$$

$$\Delta = 64 - 60$$

$$\Delta = 4$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-8) - \sqrt{4}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{8 - 2}{2}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-(-8) + \sqrt{4}}{2 \cdot 1}$$

$$x_2 = \frac{8 + 2}{2}$$

$$x_2 = 5$$

Wracamy do podstawienia $y = 8 - x$. Mamy zatem $\begin{cases} x = 3 \\ y = 8 - 3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 5 \\ y = 8 - 5 \end{cases}$

Stąd:

$\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

Odp.: Dany prostokąt ma boki długości 3 i 5.

Zadanie 9.1.

Zbiór wartości funkcji $f(x)$ to przedział domknięty $\langle -4;7 \rangle$, ponieważ funkcja osiąga wartości krańcowe, czyli (–4) oraz 7.
Zatem pierwsze zdanie jest fałszywe.

Funkcja $f(x)$ ma trzy miejsca zerowe: 2, 4, 7. Argument (–7) nie jest miejscem zerowym, ponieważ nie należy on do dziedziny funkcji.
Zatem drugie zdanie jest fałszywe.

Odp.: F, F

Zadanie 9.2.
Funkcja jest rosnąca dla $x \in (-7;-4\rangle$ oraz dla $x \in \langle 3;6\rangle$.

Funkcja jest malejąca dla $x \in \langle -4;-2\rangle$ oraz dla $x \in \langle 1;3\rangle$ oraz dla $x \in \langle 6;8\rangle$.

Funkcja jest stała dla $x \in \langle -2;1\rangle$.

Zadanie 9.3.
Wartości odczytujemy z osi y. W przedziale $\langle 1;5\rangle$ największa wartość wynosi 2 i jest osiągnięta dla argumentu 1 oraz 5.

Odp.: C

Zadanie 10.
Równanie okręgu ma postać $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, gdzie $(a; b)$ to współrzędne środka tego okręgu.

Odczytujemy środek danego okręgu: $S\,(-2;1)$.

Odległość między punktami S i P wyznaczamy ze wzoru $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

$$d=\sqrt{(3-(-2))^2+(-5-1)^2}$$

$$d=\sqrt{5^2+(-6)^2}$$

$$d=\sqrt{25+36}$$

$$d=\sqrt{61}$$

Odp.: D

Zadanie 11.1.
Wyznaczamy ilość wszystkich możliwości przy dwóch rzutach sześcienną kostką.
$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$

A – zdarzenie polegające na wyrzuceniu na dwóch kostkach parzystej liczby oczek

Możemy wypisać wszystkie możliwości.
$A = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

Możemy skorzystać z reguły mnożenia. Na pierwszej kostce mamy trzy możliwości (2, 4, 6 oczek), na drugiej również (2, 4, 6 oczek).
$|A| = 3 \cdot 3 = 9$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$P(A) = \frac{9}{36}$$

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

Zatem poprawna jest odpowiedź A, a niepoprawna odpowiedź C.

B – zdarzenie polegające na wyrzuceniu na dwóch kostkach nieparzystej liczby oczek

Możemy wypisać wszystkie możliwości.
$A = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$

Możemy skorzystać z reguły mnożenia. Na pierwszej kostce mamy trzy możliwości (1, 3, 5 oczek), na drugiej również (1, 3, 5 oczek).

$|B| = 3 \cdot 3 = 9$

$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$

$P(B) = \frac{9}{36}$

$P(B) = \frac{1}{4}$

Zatem odpowiedź B jest niepoprawna.

D – zdarzenie polegające na wyrzuceniu na dwóch kostkach liczby oczek, których suma jest większa od 10.

Wypisujemy wszystkie możliwości.
$D = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$
$|D| = 3$

$P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|}$

$P(D) = \frac{3}{36}$

$P(D) = \frac{1}{12}$

Zatem odpowiedź D jest poprawna.

E – zdarzenie polegające na wyrzuceniu na dwóch kostkach liczby oczek, których suma jest nie mniejsza od 9. (Nie mniejsza, czyli większa bądź równa 9).

Wypisujemy wszystkie możliwości.
$E = \{(4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6), (3,6), (6,3)\}$
$|E| = 10$

$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$

$P(E) = \frac{10}{36}$

$P(E) = \frac{5}{18}$

Zatem odpowiedź E jest niepoprawna.

Odp.: A, D

Zadanie 11.2.

A – zdarzenie polegające na wyrzuceniu na dwóch kostkach liczby oczek, których iloczyn jest liczbą parzystą

Aby iloczyn dwóch liczb był liczbą parzystą, jedna lub obydwie z liczb muszą być parzyste.
Łatwiej będzie obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do *A*.

A' – zdarzenie polegające na wyrzuceniu na dwóch kostkach liczby oczek, których iloczyn jest liczbą nieparzystą
Aby iloczyn dwóch liczb był liczbą nieparzystą, obie liczby muszą być nieparzyste.

$A' = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$

Możemy skorzystać z reguły mnożenia. Na pierwszej kostce mamy trzy możliwości (1, 3, 5 oczek), na drugiej również (1, 3, 5 oczek).

$|A'| = 3 \cdot 3 = 9$

$P(A') = \frac{|A'|}{|\Omega|}$

$P(A') = \frac{9}{36}$

$P(A') = \frac{1}{4}$

Stąd:

$P(A) = 1 - P(A')$

$P(A) = 1 - \frac{1}{4}$

$P(A) = \frac{3}{4}$

Odp.: Prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek, których iloczyn jest liczbą parzystą, wynosi $\frac{3}{4}$.

Zadanie 12.1.

Wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej to $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie (p, q) to współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji.

Zatem dla funkcji $f(x) = (x + 3)^2 - 1$ współrzędne wierzchołka to $(-3; -1)$.

Odp.: D

Zadanie 12.2.

Parabola będąca wykresem funkcji $f(x) = (x + 3)^2 - 1$ ma wierzchołek w punkcie $(-3; -1)$ i ramiona skierowane do góry (ponieważ współczynnik $a = 1$, czyli $a > 0$). Zbiór wartości określamy na podstawie osi *y*, zatem kluczowa jest druga współrzędna wierzchołka, która określa wartość minimalną, jaką osiąga funkcja $f(x)$. Jest to (-1). Zatem zbiór wartości danej funkcji to $\langle -1; +\infty)$.

Odp.: B

Zadanie 13.1.

$$a_n = \frac{6^n}{12}$$

$$a_{60} = \frac{6^{60}}{12} = \frac{6 \cdot 6^{59}}{12} = \frac{6^{59}}{2} = \frac{6 \cdot 6^{58}}{2} = 3 \cdot 6^{58}$$

Odp.: C

Zadanie 13.2.

Sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wyznaczamy ze wzoru $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$.
Mamy:

$$a_n = \frac{6^n}{12}$$

$$n = 5$$

$$a_1 = \frac{6^1}{12}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

Wyznaczymy iloraz q ze wzoru $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$a_{n+1} = \frac{6^{n+1}}{12}$$

$$q = \frac{\frac{6^{n+1}}{12}}{\frac{6^n}{12}}$$

$$q = \frac{6^{n+1}}{12} : \frac{6^n}{12}$$

$$q = \frac{6^{n+1}}{12} \cdot \frac{12}{6^n}$$

$$q = \frac{6^n \cdot 6}{12} \cdot \frac{12}{6^n}$$

$$q = 6$$

Podstawiamy dane do wzoru na S_n.

$$S_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-6^5}{1-6}$$

$$S_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-7776}{1-6}$$

$$S_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-7775)}{(-5)}$$

$S_5 = \frac{1}{2} \cdot 1555$

$S_5 = 777{,}5$

Odp.: Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu $a_n = \frac{6^n}{12}$ dla $n \in \mathbb{N}_+$ jest równa 777,5.

Zadanie 14.

Prosta $y = \frac{1}{2}x + b$ przechodzi przez punkt M (4;–1), więc współrzędne tego punktu spełniają równanie danej prostej.

Mamy więc: $-1 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$

$-1 = 2 + b$

$b = -3$

Zatem pierwsze zdanie jest prawdziwe.

Aby dwie proste były równoległe, muszą mieć takie same współczynniki kierunkowe.

Proste $y = -2x + 5$ i $y = \frac{1}{2}x + b$ nie są równoległe, ponieważ mają różne współczynniki kierunkowe.

(Pierwsza prosta ma współczynnik kierunkowy (–2), a druga 2).

Zatem drugie zdanie jest fałszywe.

Odp.: P, F

Zadanie 15.1.

Wyznaczamy różnicę ciągu (a_n).

$r = a_{n+1} - a_n = -3(n + 1) + 5 - (-3n + 5) = -3n - 3 + 5 + 3n - 5 = -3$

Różnica danego ciągu arytmetycznego jest ujemna, więc ciąg jest malejący.

Odp.: C, 2

Zadanie 15.2.

$a_n < -7$

$-3n + 5 < -7$

$-3n < -7 - 5$

$-3n < -12$

$n > 4$

Zatem wyraz a_n jest mniejszy od (–7) dla $n > 4$, czyli pierwszym takim wyrazem jest wyraz a_5.

Odp.: A

Zadanie 15.3.
Wyznaczamy r i a_1.

$r = a_{n+1} - a_n = -3(n + 1) + 5 - (-3n + 5) = -3n - 3 + 5 + 3n - 5 = -3$
$a_1 = -3 \cdot 1 + 5$
$a_1 = 2$

Skorzystamy ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$

Podstawiamy dane:
$-31 = 2 + (n - 1) \cdot (-3)$
$-31 = 2 - 3n + 3$
$3n = 2 + 3 + 31$
$3n = 36$
$n = 12$

Odp.: C

Zadanie 16.
Wykorzystamy następujące zależności: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{\sin 50°}{\cos 50°} - \sin^2 30° - \mathrm{tg}50° - \cos^2 30° = \mathrm{tg}50° - \sin^2 30° - \mathrm{tg}50° - \cos^2 30° =$

$= \mathrm{tg}50° - \mathrm{tg}50° - \sin^2 30° - \cos^2 30° = -(\sin^2 30° - \cos^2 30°) = -1$

Odp.: D

Zadanie 17.
n – ilość kul czarnych
$4n$ – ilość kul białych
$|\Omega| = 5n$

A – zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli białej
$|A| = 4n$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$P(A) = \frac{4n}{5n}$

$P(A) = \frac{4}{5}$

Odp.: B

Zadanie 18.
Wyznaczamy wysokość trójkąta równobocznego ze wzoru $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mamy:

$$h = \frac{4\sqrt{3}}{2}$$

$$h = 2\sqrt{3}$$

Wyznaczamy różnicę $a - h$.

$$4 - 2\sqrt{3} = 2\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

Zatem pierwsze zdanie jest prawdziwe.

Ze wzoru na pole trójkąta równobocznego $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ wyznaczamy pola trójkątów o bokach 4 oraz 6.

$$P_1 = \frac{4^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_1 = 4\sqrt{3}$$

$$P_2 = \frac{6^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_2 = 9\sqrt{3}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{4\sqrt{3}}{9\sqrt{3}}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{4}{9}$$

$$P_1 = \frac{4}{9}P_2$$

Zatem drugie zdanie jest prawdziwe.

Można to również stwierdzić w inny sposób. Dwa trójkąty równoboczne są zawsze podobne.

$4 = \frac{2}{3} \cdot 6$, czyli skala podobieństwa w tym przypadku wynosi $k = \frac{2}{3}$.

Stosunek pól jest równy k^2, więc jest $\left(\frac{2}{3}\right)^2$, czyli $\frac{4}{9}$.

Odp.: P, P

Zadanie 19.

Wykorzystamy twierdzenie cosinusów, które mówi, że dla trójkąta o bokach długości a, b, c zachodzi $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$, gdzie α to miara kąta między bokami b i c.

Mamy więc:

$$a^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3}$$

$$a^2 = 16 + 36 - 16$$

$$a^2 = 36$$

$$a = 6$$

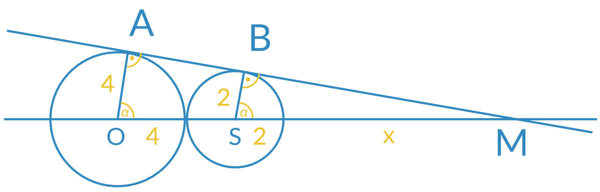
Nie rozważamy rozwiązania $a = -6$, ponieważ długość boku musi być liczbą dodatnią.

Odp.: Trzeci bok trójkąta ma długość 6 cm.

Zadanie 20.
Wprowadźmy na rysunku dane i dodatkowe oznaczenia.

Zauważmy, że trójkąty *AOM* i *BSM* są podobne, ponieważ mają parami takie same kąty.

Możemy więc zapisać zależność:



$$\frac{|AO|}{|OM|} = \frac{|BS|}{|SM|}$$

$$\frac{4}{8+x} = \frac{2}{2+x}$$

Mnożymy „na krzyż".

$4(2 + x) = 2(8 + x)$

$8 + 4x = 16 + 2x$

$2x = 8$

$x = 4$

$|SM| = x + 2$

Stąd $|SM| = 6$

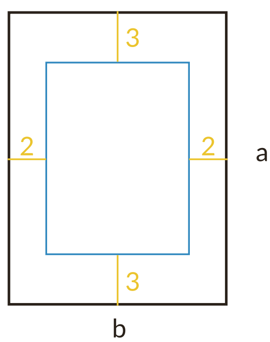
$$\cos\alpha = \frac{|BS|}{|SM|}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{6}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}$$

Odp.: Cosinus kąta *BSM* jest równy $\frac{1}{3}$.

Zadanie 21.
Oznaczmy wymiary strony.



Pole wyznaczamy następująco: $(a - 6)(b - 4)$, gdzie $a > 6$ i $b > 4$.

Szukamy wartości a i b, dla których pole to będzie jak największe.

Mamy:

$2a + 2b = 84$
$a + b = 42$
$b = 42 - a$

Zapiszemy pole jako funkcję zmiennej a.

$f(a) = (a - 6)(42 - a - 4)$

$f(a) = (a - 6)(38 - a)$

$a > 6$ i $a < 38$, czyli $a \in (6; 38)$

$f(a) = -a^2 + 44a - 288$

Jest to funkcja kwadratowa, której wykresem jest parabola o ramionach skierowanych do dołu. Zatem wartość maksymalna będzie osiągnięta w wierzchołku.

$$x_w = \frac{-44}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_w = 22$$

Wartość maksymalna będzie osiągnięta dla $a = 22$.

Obliczamy b.

$b = 42 - a$

$b = 42 - 22$

$b = 20$

Odp.: Wymiary strony tego albumu to 22 cm wysokość i 20 cm szerokość.

Zadanie 22.1.

Mediana, czyli wartość środkowa. Jest wystawionych 25 ocen, więc środkowa jest ocena trzynasta. Oceny mamy na uporządkowane, więc odczytujemy trzynastą z nich. Są dwie „1”, cztery „2”, pięć „3” – to jedenaście ocen. Następnie jest osiem „4”. Zatem trzynastą oceną jest „4”.

Odp.: C

Zadanie 22.2.

Obliczamy liczbę uczniów w klasie: $2 + 4 + 8 + 5 + 4 + 2 = 25$

Wyznaczamy średnią arytmetyczną:

$$\frac{2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 8 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{25} = \frac{89}{25} = 3{,}56$$

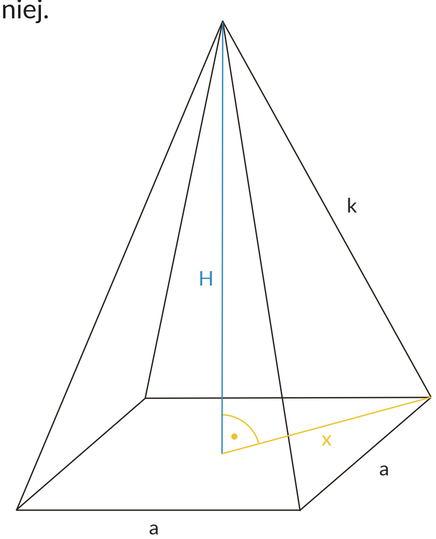
Są dwie „1”, cztery „2”, pięć „3”, czyli jedenaście ocen niższych od średniej.

$$\frac{11}{25} \cdot 100\% = 44\%$$

Odp.: D

Zadanie 23.

Wprowadźmy oznaczenia.



$a = 6\sqrt{2}$

$k = 8$

x – połowa długości przekątnej podstawy (kwadratu).

Przekątna kwadratu o boku a ma długość $a\sqrt{2}$.

$x = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$x = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2$

$x = 6$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczymy długość wysokości H.

$H^2 + x^2 = k^2$

$H^2 + 6^2 = 8^2$

$H^2 + 36 = 64$

$H^2 = 28$

$H = \sqrt{28}$

$H = 2\sqrt{7}$

Obliczamy objętość ostrosłupa.

$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$, gdzie $P_p = a^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot \left(6\sqrt{2}\right)^2 \cdot 2\sqrt{7}$

$V = \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 2\sqrt{7}$

$V = 48\sqrt{7}$

Odp.: Objętość danego ostrosłupa jest równa $48\sqrt{7}$.

Zadanie 24.

$16n^2 + 24n + 7 = 16n^2 + 24n + 4 + 3 = 4(4n^2 + 6n + 1) + 3$

Przedstawiliśmy daną liczbę jako sumę liczby 3 oraz iloczynu 4 i pewnej liczby naturalnej $4n^2 + 6n + 1$.