

KLUCZ

Nr zadania	Odpowiedź	Schemat punktowania
1.	B	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
2.	A	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
3.	D	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
4.	P, F	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
5.	25%	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
6.	A, D	2 pkt – dwie odpowiedzi poprawne. 1 pkt – jedna odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
7.	C	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
8.		2 pkt – zapisanie sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jako sumy dwóch składników, z których jeden jest iloczynem liczby 12, np. $(2n)^2 + (2n + 2)^2 + (2n + 4)^2 = 12(n^2 + 2n + 12) + 8$ oraz sformułowanie odpowiedniego wniosku z powołaniem się na zapis liczby, która przy dzieleniu przez 12 daje resztę 8. 1 pkt – zapisanie sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jako sumy dwóch składników, z których jeden jest iloczynem liczby 12, np. $(2n)^2 + (2n + 2)^2 + (2n + 4)^2 = 12(n^2 + 2n + 1) + 8$ 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania; przeprowadzenie dowodu dla konkretnych wartości liczb parzystych.
9.	D	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
10.1.	A	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
10.2.	$f(x) = \frac{2}{9}(x+2)(x-4)$	2 pkt – wyznaczenie wartości współczynnika $a = \frac{2}{9}$ i zapisanie odpowiedzi $f(x) = \frac{2}{9}(x+2)(x-4)$. 1 pkt – poprawne odczytanie miejsc zerowych funkcji f , czyli liczb -2 i 4 oraz podstawienie ich do postaci iloczynowej $f(x) = a(x+2)(x-4)$. 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.
10.3.	$x \in (-\infty, -2)$ $\cup (4, \infty)$	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Nr zadania	Odpowiedź	Schemat punktowania
11.1.	30000	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
11.2.	C	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
12.	P, F	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
13.	$a_{100} = 195$	3 pkt – poprawne wyznaczenie wyrazu setnego $a_{100} = 195$. 2 pkt – poprawne obliczenie wyrazu pierwszego $a_1 = -3$ oraz różnicy $r = 2$. 1 pkt – zapisanie dwóch różnych równań przedstawiających zależność między wyrazem pierwszym a_1 a różnicą r , np. $a_1 + 13r = 23$ i $\frac{2a_1 + 4r}{2} \cdot 5$. 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.
14.	A	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
15.	$\frac{\sqrt{7}}{14}$, $P = 6\sqrt{3}$	3 pkt – poprawne obliczenie cosinusa kąta CAB i podanie wyniku $\frac{\sqrt{7}}{14}$ oraz poprawne obliczenie pola trójkąta ABC i zapisanie wyniku $P = 6\sqrt{3}$. 2 pkt – poprawne obliczenie cosinusa kąta CAB i podanie wyniku $\frac{\sqrt{7}}{14}$. 1 pkt – zapisanie poprawnej równości wynikającej z twierdzenia cosinusów zastosowanej do kąta CAB, np. $6^2 = 4^2 + (2\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{7} \cdot \cos \sphericalangle CAB$ lub poprawne obliczenie pola trójkąta i zapisanie wyniku $P = 6\sqrt{3}$. 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.
16.	C	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
17.	B, 3	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
18.	D	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
19.	A	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
20.	C	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
21.	C	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Nr zadania	Odpowiedź	Schemat punktowania
22.	$P(A) = \frac{1}{150}$	<p>3 pkt – poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A i podanie poprawnego wyniku: $P(A) = \frac{1}{150}$.</p> <p>2 pkt – obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych i liczby wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A: $\Omega = 900$, $A = 6$.</p> <p>1 pkt – obliczenie liczby Ω wszystkich zdarzeń elementarnych: $\Omega = 900$ lub wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: 130, 310, 220, 400, 112, 202 lub obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $A = 6$.</p> <p>0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.</p>
23.	F, P	<p>1 pkt – odpowiedź poprawna.</p> <p>0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.</p>
24.	Wymiary placu zabaw wynoszą 45 m × 45 m. Największa powierzchnia placu jest równa 2025 m ² .	<p>4 pkt – poprawna metoda obliczenia długości dwóch boków prostokąta o największym polu oraz podanie wyników: $x = 45$ m, $y = 45$ m, $P(45) = 2025$ m².</p> <p>3 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole P prostokąta w zależności od jednej zmiennej, wyznaczenie dziedziny D tej funkcji oraz prawidłowe obliczenie argumentu x, dla którego funkcja osiąga wartość największą: $P(x) = x \cdot (90 - x)$, $D = (0, 90)$, $x = 45$.</p> <p>2 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole P prostokąta w zależności od jednej zmiennej $P(x) = x \cdot (90 - x)$,</p> <p>1 pkt – zapisanie związku między długościami boków prostokąta: $2x + 2y = 180$.</p> <p>0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.</p>

ROZWIĄZANIA

Zadanie 1.

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ oraz ze wzoru $(\sqrt{a})^2 = a$ dla $a \geq 0$

$$(5 - 2\sqrt{3})^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 = 25 - 20\sqrt{3} + 4 \cdot 3 = 25 - 20\sqrt{3} + 12 = 37 - 20\sqrt{3}$$

Odp.: B

Zadanie 2.

Dodawanie tych samych składników możemy zastąpić mnożeniem, czyli $3^{2023} + 3^{2023} + 3^{2023} = 3 \cdot 3^{2023}$

Zatem

$$\frac{3^{2023} + 3^{2023} + 3^{2023}}{9^{-1}} = \frac{3^1 \cdot 3^{2023}}{(3^2)^{-1}} = \frac{3^{2024}}{3^{-2}} = 3^{2024 - (-2)} = 3^{2026}$$

Korzystamy z własności działań na potęgach

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Odp.: A

Zadanie 3.

Korzystamy z własności logarytmów

$$p \cdot \log_a b = \log_a b^p$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

Zatem

$$2 \log_3 6 - \log_3 12 = \log_3 36 - \log_3 12 = \log_3 \frac{36}{12} = \log_3 3 = 1$$

Odp.: D

Zadanie 4.

Zdanie 1. Korzystamy z własności potęgowania

jeśli $x < y$ i $a > 1$, to $a^x < a^y$. Skoro $\sqrt{3} > \sqrt{2}$ i $4 > 1$, prawdziwa jest nierówność

$$4^{\sqrt{3}} > 4^{\sqrt{2}}$$

Zdanie 2. Korzystamy z własności potęgowania

jeśli $x < y$ i $0 < a < 1$, to $a^x > a^y$. Skoro $-\pi < -1$ i $0 < \frac{1}{4} < 1$, prawdziwa jest nierówność

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\pi} > \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$$

Odp.: P, F

Zadanie 5.

Obliczamy, jakim procentem liczby 5,20 jest różnica cen.

$$\frac{6,50 - 5,20}{5,20} \cdot 100\% = \frac{1,3}{5,2} \cdot 100\% = 0,25 \cdot 100\% = 25\%$$

Odp.: 25%

Zadanie 6.

Rozwiążmy układ równań metodą przeciwnych współczynników, gdyż zauważamy, że przy zmiennej y mamy już przeciwne współczynniki. Zatem dodając pierwsze równanie do drugiego, otrzymujemy

$$5x = -10$$

$$x = -2$$

Wybierając dowolne równanie (to, które wydaje nam się być łatwiejsze), podstawiamy w miejsce x liczbę -2 .
Zatem

$$\begin{cases} x = -2 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ 2 \cdot (-2) + y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Zatem rozwiązaniem układu równań jest para liczb $x = -2$ i $y = 2$.

Analizując kolejno odpowiedzi A-F, mamy:

- A. Liczby -2 i 2 są liczbami przeciwnymi, więc ta odpowiedź jest poprawna.
- B. Liczba odwrotna do liczby -2 to liczba $-\frac{1}{2}$, zatem odpowiedź ta jest niepoprawna.
- C. Iloczyn tych liczb $-2 \cdot 2 = -4 \neq 0$, zatem odpowiedź C jest niepoprawna.
- D. Suma kwadratów tych liczb wynosi $(-2)^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$, zatem odpowiedź D jest poprawna.
- E. Suma wartości bezwzględnych tych liczb wynosi $|-2| + |2| = 2 + 2 = 4 \neq 0$ zatem odpowiedź E jest niepoprawna.
- F. Suma tych liczb wynosi $-2 + 2 = 0$, ale liczba 0 nie jest liczbą dodatnią, więc odpowiedź F jest niepoprawna.

Odp.: A, D

Zadanie 7.

Wypiszmy wszystkie współczynniki wielomianu $W(x)$, który jest wielomianem trzeciego stopnia.

$$a_3 = 2, \quad a_2 = -k, \quad a_1 = 10, \quad a_0 = -2k + 3$$

Skoro suma tych liczb wynosi 24 , więc

$$2 + (-k) + 10 + (-2k + 3) = 24$$

opuszczamy nawiasy bez żadnych zmian, gdyż przed nimi stoi znak $+$

$$2 - k + 10 - 2k + 3 = 24$$

redukujemy wyrazy podobne

$$-3k + 15 = 24$$

odejmujemy od obu stron równania liczbę 15

$$-3k = 24 - 15$$

$$-3k = 9$$

$$k = -3$$

Odp.: C

Zadanie 8.

Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wówczas trzy kolejne liczby naturalne parzyste możemy zapisać w postaci wyrażeń

$$2n, \quad 2n + 2, \quad 2n + 4.$$

Wykażemy, że suma kwadratów tych liczb przy dzieleniu przez 12 daje resztę 8, czyli sumę tę można zapisać w postaci $12k + 8$, gdzie k jest pewną liczbą naturalną.

Zatem korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, mamy

$$(2n)^2 + (2n + 2)^2 + (2n + 4)^2 = 4n^2 + 4n^2 + 8n + 4 + 4n^2 + 16n + 16 = 12n^2 + 24n + 20 = 12n^2 + 24n + 12 + 8 =$$

wyłączamy liczbę 12 jako wspólny czynnik z trzech pierwszych składników

$$= 12(n^2 + 2n + 1) + 8 = 12k + 8, \text{ gdzie } k = n^2 + 2n + 1 \text{ jest liczbą naturalną jako suma trzech składników naturalnych (skoro } n \text{ jest liczbą naturalną, to i liczby } n^2, 2n \text{ są naturalne), co oznacza, że suma } (2n)^2 + (2n + 2)^2 + (2n + 4)^2 \text{ przy dzieleniu przez 12 daje resztę 8.}$$

Zadanie 9.

Z wykresu funkcji $f(x) = ax + b$ odczytujemy, że punkt $(0, 2)$ należy do jej wykresu, więc $b = 2$.

Współczynnik b we wzorze funkcji liniowej ma związek z punktem przecięcia wykresu tej funkcji z osią OY , czyli punktem $(0, b)$.

Ponadto odczytujemy również, że punkt $(3, 0)$ należy do wykresu naszej funkcji, czyli możemy podstawić jego współrzędne do wzoru funkcji, otrzymując

$$0 = 3a + 2$$

rozwiązujemy równanie z niewiadomą a

$$3a = -2$$

$$a = -\frac{2}{3}$$

Zatem funkcja f określona jest wzorem $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$.

Odp.: D

Zadanie 10.1.

Wykres funkcji g powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji f o 1 jednostkę w lewo wzdłuż osi OX , zatem musimy przesunąć miejsca zerowe funkcji f o 1 jednostkę w lewo.

Z wykresu funkcji f odczytujemy, że jej miejsca zerowe to liczby -2 i 4 , więc miejscami zerowymi funkcji g są liczby $-2 - 1 = -3$ i $4 - 1 = 3$.

Odp.: A

Zadanie 10.2.

Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej, przy istnieniu dwóch miejsc zerowych zapisujemy jako

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

gdzie x_1, x_2 są miejscami zerowymi funkcji.

Z wykresu funkcji f odczytujemy miejsca zerowe: $x_1 = -2$ i $x_2 = 4$. Zatem wzór funkcji f ma postać

$$f(x) = a(x - (-2))(x - 4)$$

$$f(x) = a(x + 2)(x - 4)$$

Aby znaleźć wartość współczynnika a , wystarczy podstawić do powyższego wzoru współrzędne punktu, który należy do wykresu funkcji f . Wierzchołek $W(1, -2)$ jest takim punktem, zatem

$$-2 = a(1 + 2)(1 - 4)$$

w miejsce x podstawiamy liczbę 1, w miejsce $f(x)$ podstawiamy liczbę -2 .

$$-2 = 3a \cdot (-3)$$

$$-2 = -9a$$

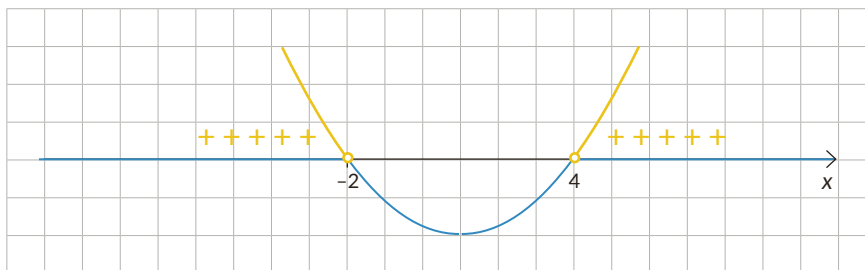
dzielimy równanie przez -9

$$a = \frac{2}{9}$$

Odp.: Zatem wzór funkcji f w postaci iloczynowej zapisujemy jako $f(x) = \frac{2}{9}(x + 2)(x - 4)$.

Zadanie 10.3.

Aby rozwiązać nierówność $f(x) > 0$, odczytujemy z wykresu funkcji f zbiór tych liczb x , dla których wykres funkcji f znajduje się powyżej osi OX (bo wartości $f(x) > 0$).



Odp.: Rozwiązaniem nierówności $f(x) > 0$ są liczby $x \in (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$.

Zadanie 11.1.

Do wzoru $b(t) = b_0 \cdot 2^t$ w miejsce $b(t)$ wstawiamy liczbę $1,2 \cdot 10^5$, a w miejsce t wstawiamy liczbę 2.

Pamiętaj o zamianie jednostek czasu: 120 minut to 2 godziny. Zatem

$$1,2 \cdot 10^5 = b_0 \cdot 2^2$$

rozwiązujemy równanie z niewiadomą b_0 .

$$1,2 \cdot 10^5 = 4 \cdot b_0$$

dzielimy równanie przez 4

$$b_0 = \frac{1,2 \cdot 10^5}{4} = 0,3 \cdot 100000 = 30000$$

Odp.: 30000

Zadanie 11.2.

Z treści zadania początkowa liczba bakterii, czyli b_0 jest równa 8. Zatem podstawiając tę daną do wzoru otrzymujemy

$$b(t) = 8 \cdot 2^t$$

$$b(t) = 2^3 \cdot 2^t$$

korzystamy ze wzoru $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$$b(t) = 2^{t+3}$$

Aby dokonać teraz właściwego wyboru odpowiedzi, możemy policzyć ze wzoru wartość funkcji b dla wybranego argumentu $t = 1$ i sprawdzić, czy rozważany punkt $(1, b(1))$ należy do wykresu funkcji przedstawionego na rysunku. Zatem

$$b(1) = 2^{1+3} = 2^4 = 16$$

Zauważamy, że punkt o współrzędnych $(1, 16)$ należy tylko do wykresu funkcji przedstawionej na rysunku C.

Odp.: C

Zadanie 12.

Zdanie 1. Korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

i podstawiając w miejsce a_1 liczbę -3 i w miejsce q liczbę -2 oraz w miejsce n liczbę 100 , otrzymujemy

$$a_{100} = -3 \cdot (-2)^{99}$$

$$(-2)^{99} = (-1 \cdot 2)^{99} \text{ i korzystamy ze wzoru } (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$

$$a_{100} = -3 \cdot (-1)^{99} \cdot 2^{99}$$

$$a_{100} = -3 \cdot (-1) \cdot 2^{99}$$

$$a_{100} = 3 \cdot 2^{99}$$

Zdanie pierwsze jest prawdziwe.

Zdanie 2. Obliczmy kilka pierwszych wyrazów ciągu (a_n) :

$$a_1 = -3$$

$$a_2 = -3 \cdot (-2) = 6$$

$$a_3 = 6 \cdot (-2) = -12$$

$$a_4 = -12 \cdot (-2) = 24$$

Zauważamy, że wyrazy ciągu (a_n) nie są ani rosnące, ani malejące, ani stałe, stąd wniosek, że ciąg nie jest monotoniczny. Zdanie drugie jest fałszywe.

Odp.: P, F

Zadanie 13.

KROK 1. Na podstawie treści zadania tworzymy dwa równania z niewiadomą a_1 r.

$$\text{Skoro } a_{14} = 23, \text{ więc } a_{14} = a_1 + 13r$$

$$\text{korzystamy ze wzoru } a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$\text{skoro } S_5 = 5, \text{ więc } \frac{2a_1 + (5-1)r}{2} \cdot 5 = 5$$

korzystamy ze wzoru $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$

$$\frac{2a_1 + 4r}{2} \cdot 5 = 5$$

dzielimy równanie przez 5

$$\frac{2a_1 + 4r}{2} = 1$$

$$a_1 + 2r = 1$$

KROK 2. Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} a_1 + 13r = 23 \\ a_1 + 2r = 1 \end{cases}$$

Mnożymy np. drugie równanie przez liczbę -1 , aby uzyskać przeciwne współczynniki przy niewiadomej a_1 .
Zatem

$$\begin{cases} a_1 + 13r = 23 \\ -a_1 - 2r = -1 \end{cases}$$

Dodając pierwsze równanie do drugiego stronami, otrzymujemy

$$11r = 22$$

$$r = 2$$

Wybieramy jedno (łatwiejsze) równanie z układu i podstawiamy w miejsce r liczbę 2.

$$\begin{cases} r = 2 \\ a_1 + 2 \cdot 2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 2 \\ a_1 = -3 \end{cases}$$

KROK 3. Obliczamy wyraz a_{100} .

$$a_{100} = a_1 + (100 - 1) \cdot r$$

korzystamy ze wzoru $a_n = a_1 + (n - 1)r$

$$a_{100} = -3 + 99 \cdot 2$$

$$a_{100} = -3 + 198$$

$$a_{100} = 195$$

Odp.: $a_{100} = 195$

Zadanie 14.

Korzystamy ze wzoru

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

i mamy

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

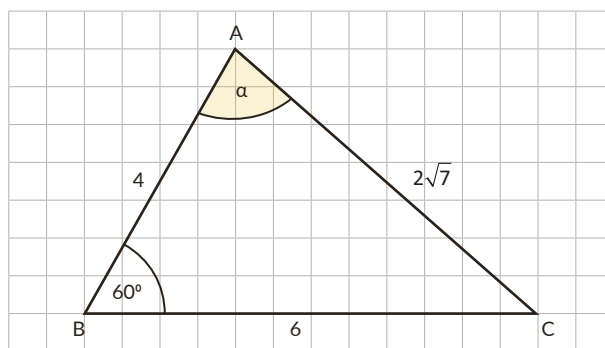
$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \text{ lub } \cos \alpha = -\frac{4}{5} \text{ pamiętaj, że wartości funkcji cosinus dla kątów rozwartych są zawsze ujemne!}$$

$$\text{Zatem } \cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

Odp.: A

Zadanie 15.

Wykonajmy rysunek pomocniczy. Oznaczmy przez α kąt CAB .



Kąt trójkąta ABC mający największą miarę leży naprzeciw najdłuższego boku trójkąta ABC , czyli boku o długości 6, zatem jest to kąt α .

KROK 1. Na podstawie twierdzenia cosinusów zapisujemy równość

$$6^2 = 4^2 + (2\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{7} \cdot \cos \alpha$$

KROK 2. Rozwiązujemy równanie z niewiadomą $\cos \alpha$

$$36 = 16 + 28 - 16\sqrt{7} \cdot \cos \alpha$$

$$-8 = -16\sqrt{7} \cdot \cos \alpha$$

dzielimy równanie przez $-16\sqrt{7}$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

usuwamy niewymierność z mianownika, mnożąc licznik i mianownik przez $\sqrt{7}$.

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

KROK 3. Obliczamy pole trójkąta ABC . Pole trójkąta o bokach długości a i b i kącie α między nimi wyrażamy wzorem $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P = 6\sqrt{3}$$

$$\text{Odp.: } \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{14}, P = 6\sqrt{3}$$

Zadanie 16.

W celu obliczenia obwodu kwadratu $ABCD$ obliczmy wpierw długość jego boku AB . Zatem

$$|AB| = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (-3 - 1)^2}$$

$$\text{korzystamy ze wzoru } |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(4 + 2)^2 + (-4)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{36 + 16}$$

$$|AB| = \sqrt{52}$$

wyłączamy czynnik przed znak pierwiastka

$$|AB| = \sqrt{4 \cdot 13}$$

$$\text{korzystamy ze wzoru } \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$|AB| = 2 \cdot \sqrt{13}$$

Zatem obwód kwadratu $ABCD$ jest równy

$$L = 4 \cdot |AB| = 4 \cdot 2\sqrt{13} = 8\sqrt{13}$$

Odp.: C

Zadanie 17.

Z równania okręgu O odczytujemy współrzędne jego środka jako $(-2, 3)$ oraz długość jego promienia $r = 7$.

Równanie okręgu O o środku (a, b) i długości promienia r ma postać

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Środek okręgu symetrycznego do okręgu O względem osi OY ma współrzędne $(2, 3)$.

Współrzędne x punktów symetrycznych względem osi OY są liczbami przeciwnymi, współrzędne y takich punktów są takie same.

Zatem równanie okręgu symetrycznego do okręgu O względem osi OY ma postać $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 49$.

Promienie okręgów symetrycznych mają taką samą długość.

Odp.: B, 3

Zadanie 18.

Oznaczmy przez α szukany kąt nachylenia przekątnej d graniastosłupa do płaszczyzny podstawy i zaznaczmy go na rysunku.

Trójkąt ABC jest prostokątny, a przyprostokątna przy kącie α ma długość 8.

Dłuższa przekątna każdego sześciokąta foremnego o boku długości a ma zawsze długość $2a$.

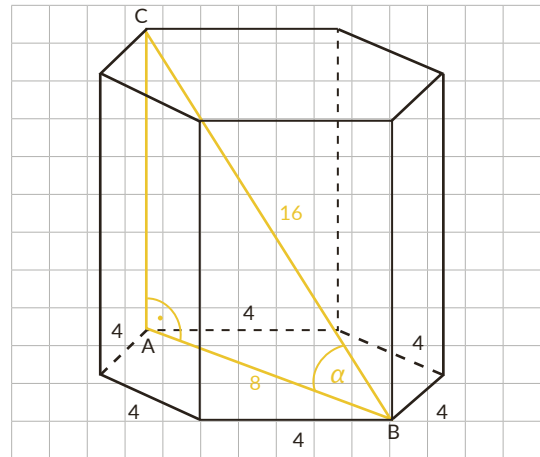
Korzystając z definicji funkcji cosinus, mamy

$$\cos \alpha = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

pamiętamy, że $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ lub znajdujemy tę wartość w tablicach trygonometrycznych

Zatem $\alpha = 60^\circ$.

Odp.: D



Zadanie 19.

Oznaczmy przez V_1 objętość mniejszego ostrosłupa, zaś przez V_2 objętość większego ostrosłupa. Szukamy skali podobieństwa większego ostrosłupa do mniejszego. Zależność między skalą podobieństwa większego ostrosłupa do mniejszego a ich objętościami wyraża wzór

$$k^3 = \frac{V_2}{V_1}$$

pamiętamy, że stosunek objętości brył podobnych w skali k jest równy k^3 .

$$k^3 = \frac{81}{27}$$

$$k^3 = 3$$

„przykładamy” pierwiastek sześcienny do obu stron równania

$$\sqrt[3]{k^3} = \sqrt[3]{3}$$

pamiętamy, że $\sqrt[3]{a^3} = a$

$$k = \sqrt[3]{3}$$

Odp.: A

Zadanie 20.

Wykonajmy rysunek pomocniczy.

cyfra:	tysiący	setek	dziesiątek	jedności
	3 możliwości	4 możliwości	4 możliwości	4 możliwości
	{4, 5, 7}	{0, 4, 5, 7}	{0, 4, 5, 7}	{0, 4, 5, 7}

Cyfrą tysięcy nie może być cyfra 0, a pozostałe cyfry liczby czterocyfrowej mogą być wybrane na 4 możliwości każda.

Kiedy skorzystamy z reguły mnożenia, liczba wszystkich liczb czterocyfrowych, w których zapisie występują wyłącznie cyfry 0, 4, 5, 7, wyniesie $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$

Odp.: C

Zadanie 21.

Doświadczenie losowe polega na losowaniu jednej skarpetki spośród $8 + n$ skarpetek. Zatem $|\Omega| = 8 + n$. Niech A oznacza zdarzenie losowe, polegające na wylosowaniu czarnej skarpetki. Czarnych skarpetek jest n , więc

$$|A| = n$$

Korzystając z definicji prawdopodobieństwa klasycznego

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

mamy
z treści zadania $P(A) = \frac{3}{5}$

$$\frac{3}{5} = \frac{n}{8+n}$$

Korzystamy w własności proporcji „mnożenia na krzyż”

$$5n = 3(8 + n)$$

$$5n - 3n = 24$$

$$2n = 24$$

$$n = 12$$

Odp.: C

Zadanie 22.

KROK 1. Obliczamy ilość wszystkich możliwych wyników losowania.

$$|\Omega| = 999 - 100 + 1 = 900$$

musimy ustalić, ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych naturalnych; najmniejszą z tych liczb jest 100 zaś największą 999.

lub

$$|\Omega| = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$$

korzystamy z reguły mnożenia

KROK 2. Oznaczmy przez A zdarzenie polegające na tym, że wylosowana liczba jest parzysta i suma jej cyfr jest równa 4.

$$A = \{130, 310, 220, 400, 112, 202\}$$

wypisujemy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zajściu zdarzenia A

Zatem $|A| = 6$

KROK 3. Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$P(A) = \frac{6}{900}$$

Odp.: $P(A) = \frac{1}{150}$

Zadanie 23.

Zdanie 1. Aby prawidłowo wskazać medianę danego zestawu liczb, musimy je ustawić w kolejności od najmniejszej do największej:

2000, 2000, 2000, 2000, 2000,
 3000, 3000,
 4000, 4000, 4000, 4000,
 5000, 5000, 5000,
 6000, 6000, 6000, 6000, 6000, 6000, 6000,
 8000

Mamy 22 pensje. Jest to liczba parzysta, zatem podkreślimy dwie środkowe pensje w tym zestawie danych. Medianę parzystej ilości liczb obliczamy jako średnią arytmetyczną dwóch środkowych liczb. Zatem

$$\frac{4000 + 5000}{2} = 4500$$

Mediana miesięcznych zarobków pracowników tej firmy jest równa 4500 zł. Zdanie pierwsze jest fałszywe.

Zdanie 2. Pojęcie dominanty określa, jaka liczba w danym zestawie liczb występuje najczęściej. Z wykresu musimy odczytać pensję, która jest wypłacana największej liczbie pracowników, zatem 7 pracowników (najwięcej w firmie) zarabia miesięcznie po 6000 zł. Pensja 6000 zł pojawia się najwięcej razy – jest to dominanta miesięcznych zarobków pracowników tej firmy. Zdanie drugie jest prawdziwe.

Odp.: F, P

Zadanie 24.

Plac zabaw jest w kształcie prostokąta. Zatem oznaczmy przez x i y długości boków prostokąta o obwodzie równym 180 metrów. W obliczeniach pominiemy zapis jednostek, ale przy odpowiedzi końcowej musimy o nim pamiętać.

KROK 1. Zapisujemy związek między długościami boków prostokąta.

Skoro obwód prostokąta wynosi 180, więc

$$2x + 2y = 180$$

obwód prostokąta to suma dwukrotności jego boków

$$x + y = 90$$

oraz $x > 0$, $y > 0$.

x , y oznaczają długości boków, więc muszą być liczbami dodatnimi.

Z ostatniego równania wyznaczamy jedną zmienną, np y

$$y = 90 - x.$$

KROK 2. Zapisujemy wzór na pole prostokąta jako funkcję jednej zmiennej oraz wyznaczamy jej dziedzinę D .

$$P = x \cdot y$$

pole prostokąta wyrażamy jako iloczyn długości jego boków

$$P(x) = x \cdot (90 - x)$$

podstawiamy w miejsce y wyrażenie $90 - x$, wyznaczone w KROKU 1.

$$P(x) = -x^2 + 90x$$

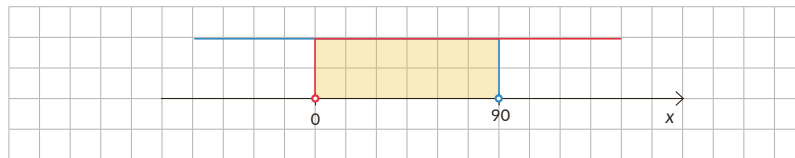
jest to wzór funkcji opisujący pole naszego prostokąta w zależności od długości boku x .

Każda funkcja ma swoją dziedzinę D . W KROKU 1. zapisaaliśmy, że $x > 0$ i $y > 0$, ale $y = 90 - x$, więc

$$90 - x > 0$$

$$x < 90$$

Warunki $x > 0$ oraz $x < 90$ muszą zachodzić jednocześnie, więc dziedziną naszej funkcji $P(x)$ będzie część wspólna przedziałów, opisanych tymi warunkami.



Zatem dziedzina naszej funkcji jest postaci $D = (0, 90)$.

KROK 3. Obliczamy wartość argumentu x , dla którego funkcja pola ma największą wartość.

Wykresem funkcji kwadratowej $P(x)$ jest pewna część paraboli o ramionach skierowanych w dół. współczynnik $a = -1 < 0$

W takim przypadku funkcja $P(x)$ może przyjmować wartość największą dla argumentu, będącego pierwszą współzrędną wierzchołka paraboli, czyli dla

$$x = \frac{-90}{2 \cdot (-1)} = 45$$

pierwsza współzrędną wierzchołka paraboli $x_w = -\frac{b}{2a}$

KROK 4. Obliczamy długość drugiego boku prostokąta oraz największe pole prostokąta.

Skoro $x = 45 \in (0, 90)$, więc funkcja $P(x)$ osiąga wartość największą dla argumentu $x = 45$. Zatem obliczamy teraz długość drugiego boku prostokąta

$$y = 90 - x = 90 - 45 = 45$$

oraz obliczamy największe pole prostokąta

$$P(45) = -45^2 + 90 \cdot 45 = -2025 + 4050 = 2025.$$

Korzystamy ze wzoru funkcji $P(x) = -x^2 + 90x$

Odp.: Największa powierzchnia placu zabaw jest równa 2025 m^2 przy wymiarach $45 \text{ m} \times 45 \text{ m}$, czyli plac zabaw jest w kształcie kwadratu o boku długości 45 metrów.