

# KLUCZ

Nr zadania	Odpowiedź	Schemat punktowania
1.	C	<b>1 pkt</b> – odpowiedź poprawna. <b>0 pkt</b> – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
2.	B	<b>1 pkt</b> – odpowiedź poprawna. <b>0 pkt</b> – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
3.	C	<b>1 pkt</b> – odpowiedź poprawna. <b>0 pkt</b> – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
4.	A	<b>1 pkt</b> – odpowiedź poprawna. <b>0 pkt</b> – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
5.	B, E	<b>2 pkt</b> – obie poprawne odpowiedzi. <b>1 pkt</b> – jedna poprawna odpowiedź. <b>0 pkt</b> – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
6.	$x \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$	<b>3 pkt</b> – podanie poprawnej odpowiedzi: $x \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ <b>2 pkt</b> – obliczenie miejsc zerowych trójmianu kwadratowego: $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = 1$ <b>1 pkt</b> – doprowadzenie nierówności do postaci np.: $-2x^2 + 7x - 5 < 0$ <b>0 pkt</b> – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
7.	C	<b>1 pkt</b> – odpowiedź poprawna. <b>0 pkt</b> – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
8.	$k: y = \frac{13}{14}x + 15$	<b>3 pkt</b> – zapisanie poprawnej odpowiedzi – równania prostej $k$ : $y = \frac{13}{14}x + 15$ <b>2 pkt</b> – skorzystanie z własności prostych równoległych i zapisanie prostej $k$ w postaci: $y = \frac{13}{14}x + b$ <b>1 pkt</b> – wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej $k$ : $a = \frac{13}{14}$ . <b>0 pkt</b> – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
9.1.	F, F	<b>1 pkt</b> – odpowiedź poprawna (obie odpowiedzi muszą być poprawne). <b>0 pkt</b> – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi
9.2.	Funkcja jest rosnąca dla $x \in (-7; -4)$ oraz dla $x \in (3; 6)$ . Funkcja jest malejąca dla $x \in (-4; -2)$ oraz dla $x \in (1; 3)$ oraz dla $x \in (6; 8)$ . Funkcja jest stała dla $x \in (-2; 1)$ .	<b>1 pkt</b> – odpowiedź poprawna. <b>0 pkt</b> – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Nr zadania	Odpowiedź	Schemat punktowania
9.3.	C	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
10.	D	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
11.1.	A, D	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
11.2.	Prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek, których iloczyn jest liczbą parzystą, wynosi $\frac{3}{4}$ .	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
12.1.	D	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
12.2.	B	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
12.3.	B	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
13.1.	C	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
13.2.	Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu $a_n = \frac{6^n}{12}$ dla $n \in \mathbb{N}_+$ jest równa 777,5.	2 pkt – obliczenie sumy pięciu początkowych wyrazów tego ciągu. 1 pkt – wyznaczenie pierwszego wyrazu $a_1$ oraz ilorazu $q$ tego ciągu. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
14.	P, F	1 pkt – odpowiedź poprawna (obie odpowiedzi muszą być poprawne). 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
15.1.	C, 2	1 pkt – odpowiedź poprawna (obie odpowiedzi muszą być poprawne). 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
15.2.	A	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
15.3.	C	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
16.	D	1 pkt – odpowiedź poprawna (obie odpowiedzi muszą być poprawne). 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
17.	B	1 pkt – odpowiedź poprawna. 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
18.	P, P	1 pkt – odpowiedź poprawna (obie odpowiedzi muszą być poprawne). 0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Nr zadania	Odpowiedź	Schemat punktowania
19.	trzeci bok trójkąta – 6 cm	<b>2 pkt</b> – odpowiedź poprawna – wyznaczenie trzeciego boku trójkąta. <b>1 pkt</b> – zapisanie poprawnej równości wynikającej z twierdzenia cosinusów, pozwalającej wyznaczyć długość trzeciego boku. <b>0 pkt</b> – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
20.	Cosinus kąta <i>BSM</i> jest równy $\frac{1}{3}$ .	<b>3 pkt</b> – podanie poprawnej odpowiedzi – wyznaczenie cosinusa kąta <i>BSM</i> . <b>2 pkt</b> – obliczenie długości boku <i>SM</i> . <b>1 pkt</b> – wprowadzenie odpowiednich oznaczeń i zapisanie zależności, pozwalającej obliczyć długość boku <i>SM</i> . <b>0 pkt</b> – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
21.	Wymiary albumu: 22 cm i 20 cm.	<b>3 pkt</b> – odpowiedź poprawna. <b>2 pkt</b> – zapisanie odpowiedniego wzoru funkcji, pozwalającego wyznaczyć poprawną odpowiedź. <b>1 pkt</b> – zapisanie związku pomiędzy zmiennymi. <b>0 pkt</b> – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
22.1.	C	<b>1 pkt</b> – odpowiedź poprawna. <b>0 pkt</b> – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
22.2.	D	<b>1 pkt</b> – odpowiedź poprawna. <b>0 pkt</b> – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
23.	Objętość danego ostrosłupa jest równa $48\sqrt{7}$ .	<b>3 pkt</b> – odpowiedź poprawna. <b>2 pkt</b> – wyznaczenie długości wysokości ostrosłupa. <b>1 pkt</b> – wyznaczenie długości przekątnej podstawy ostrosłupa. <b>0 pkt</b> – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
24.	$4(4n^2 + 6n + 1) + 3$	<b>2 pkt</b> – zapisanie podanej liczby w postaci $4(4n^2 + 6n + 1) + 3$ oraz sformułowanie odpowiedniego wniosku. <b>1 pkt</b> – zapisanie podanej liczby w postaci $4(4n^2 + 6n + 1) + 3$ <b>0 pkt</b> – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
25.	$V = 288\pi$	<b>2 pkt</b> – wyznaczenie objętości kuli: $V = 288\pi$ <b>1 pkt</b> – wyznaczenie promienia kuli: $r = 6$ <b>0 pkt</b> – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.
26.	B	<b>1 pkt</b> – odpowiedź poprawna. <b>0 pkt</b> – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

## ROZWIĄZANIA

### Zadanie 1.

Skorzystamy ze wzoru  $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$  oraz  $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$$\left(8^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 9^{-1}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{8} + 3 \cdot \frac{1}{9}\right)^2 = \left(2 + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(2\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9} = 5\frac{4}{9}$$

Odp.: C

**Zadanie 2.**

Skorzystamy ze wzoru  $\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$

$$2\log_6 36 + \frac{1}{3}\log 1000 - \log_2 \frac{1}{2} = 2 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 - (-1) = 4 + 1 + 1 = 6$$

Odp.: B

**Zadanie 3.**

Liczba jest podzielna przez 5, jeżeli ostatnia cyfra jest równa 0 lub 5.

Na pierwszym miejscu (cyfra setek) może być dziewięć cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Na drugim miejscu (cyfra dziesiątek) może być dziesięć cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Na trzecim miejscu (cyfra jedności) mogą być dwie cyfry: 0, 5.

Korzystając z reguły mnożenia, mamy  $9 \cdot 10 \cdot 2$  możliwości, czyli takich liczb jest 180.

Odp.: C

**Zadanie 4.**

$$3 \cdot (2x + 1) = 2 \cdot (3x - 3)$$

$$6x + 3 = 6x - 6$$

$$3 = -6$$

Otrzymaliśmy równanie sprzeczne – brak rozwiązania.

Odp.: A

**Zadanie 5.**

Wykorzystamy wzory skróconego mnożenia:  $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ ,  $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ .

$$4 - (4a^2 - 4ab + b^2) = 2^2 - (2a - b)^2 = [2 - (2a - b)][2 + (2a - b)] = [2 + (b - 2a)][2 - (b - 2a)]$$

Odp.: B, E

**Zadanie 6.**

$$(x + 3)^2 - x(3x + 2) < 14 - 3x$$

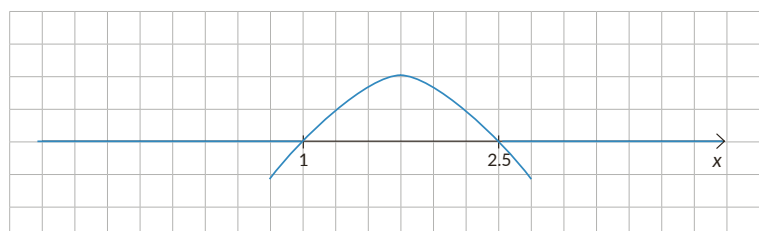
$$x^2 + 6x + 9 - 3x^2 - 2x < 14 - 3x$$

$$-2x^2 + 7x - 5 < 0$$

Otrzymaliśmy nierówność kwadratową.

$$\Delta = 9$$

$$x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = 1$$



$$\text{Odp.: } x \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$$

**Zadanie 7.**

$$4x^2 - 2 = 0 \text{ lub } x - 4 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \quad \downarrow \quad x = 4$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Odp.: C

**Zadanie 8.**

$$\text{Współczynnik kierunkowy prostej } l: a = \frac{7 - \frac{1}{2}}{4 - (-3)} = \frac{\frac{13}{2}}{7} = \frac{13}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{13}{14}$$

Współczynniki kierunkowe prostych równoległych są takie same, zatem prosta  $k$  ma równanie:  $y = \frac{13}{14}x + b$

$$\text{Prosta } k \text{ przechodzi przez punkt } P(-14, 2), \text{ więc } 2 = \frac{13}{14} \cdot (-14) + b$$

$$b = 15$$

$$\text{Odp. Równanie prostej } k: y = \frac{13}{14}x + 15$$

**Zadanie 9.1.**

Zbiór wartości funkcji  $f(x)$  to przedział domknięty  $\langle -4; 7 \rangle$ , ponieważ funkcja osiąga wartości krańcowe, czyli  $(-4)$  oraz  $7$ .

Zatem pierwsze zdanie jest fałszywe.

Funkcja  $f(x)$  ma trzy miejsca zerowe:  $2, 4, 7$ . Argument  $(-7)$  nie jest miejscem zerowym, ponieważ nie należy on do dziedziny funkcji.

Zatem drugie zdanie jest fałszywe.

Odp.: F, F

**Zadanie 9.2.**

Funkcja jest rosnąca dla  $x \in (-7; -4)$  oraz dla  $x \in (3; 6)$ .

Funkcja jest malejąca dla  $x \in (-4; -2)$  oraz dla  $x \in (1; 3)$  oraz dla  $x \in (6; 8)$ .

Funkcja jest stała dla  $x \in (-2; 1)$ .

**Zadanie 9.3.**

Wartości odczytujemy z osi  $y$ . W przedziale  $\langle 1; 5 \rangle$  największa wartość wynosi  $2$  i jest osiągnięta dla argumentu  $1$  oraz  $5$ .

Odp.: C

**Zadanie 10.**

Równanie okręgu ma postać  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , gdzie  $(a; b)$  to współrzędne środka tego okręgu.

Odczytujemy środek danego okręgu:  $S(-2; 1)$ .

Odległość między punktami  $S$  i  $P$  wyznaczamy ze wzoru  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

$$d = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (-5 - 1)^2}$$

$$d = \sqrt{5^2 + (-6)^2}$$

$$d = \sqrt{25 + 36}$$

$$d = \sqrt{61}$$

Odp.: D

**Zadanie 11.1.**

Wyznaczamy ilość wszystkich możliwości przy dwóch rzutach sześcienną kostką.

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$$

$A$  – zdarzenie polegające na wyrzuceniu na dwóch kostkach parzystej liczby oczek

Możemy wypisać wszystkie możliwości.

$$A = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$$

Możemy skorzystać z reguły mnożenia. Na pierwszej kostce mamy trzy możliwości (2, 4, 6 oczek), na drugiej również (2, 4, 6 oczek).

$$|A| = 3 \cdot 3 = 9$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$P(A) = \frac{9}{36}$$

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

Zatem poprawna jest odpowiedź A, a niepoprawna odpowiedź C.

$B$  – zdarzenie polegające na wyrzuceniu na dwóch kostkach nieparzystej liczby oczek

Możemy wypisać wszystkie możliwości.

$$A = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$$

Możemy skorzystać z reguły mnożenia. Na pierwszej kostce mamy trzy możliwości (1, 3, 5 oczek), na drugiej również (1, 3, 5 oczek).

$$|B| = 3 \cdot 3 = 9$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$$

$$P(B) = \frac{9}{36}$$

$$P(B) = \frac{1}{4}$$

Zatem odpowiedź B jest niepoprawna.

D – zdarzenie polegające na wyrzuceniu na dwóch kostkach liczby oczek, których suma jest większa od 10.

Wypisujemy wszystkie możliwości.

$$D = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$$

$$|D| = 3$$

$$P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|}$$

$$P(D) = \frac{3}{36}$$

$$P(D) = \frac{1}{12}$$

Zatem odpowiedź D jest poprawna.

E – zdarzenie polegające na wyrzuceniu na dwóch kostkach liczby oczek, których suma jest nie mniejsza od 9. (Nie mniejsza, czyli większa bądź równa 9).

Wypisujemy wszystkie możliwości.

$$E = \{(4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6), (3,6), (6,3)\}$$

$$|E| = 10$$

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

$$P(E) = \frac{10}{36}$$

$$P(E) = \frac{5}{18}$$

Zatem odpowiedź E jest niepoprawna.

Odp.: A, D

### Zadanie 11.2.

A – zdarzenie polegające na wyrzuceniu na dwóch kostkach liczby oczek, których iloczyn jest liczbą parzystą

Aby iloczyn dwóch liczb był liczbą parzystą, jedna lub obydwie z liczb muszą być parzyste. Łatwiej będzie obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do A.

A' – zdarzenie polegające na wyrzuceniu na dwóch kostkach liczby oczek, których iloczyn jest liczbą nieparzystą

Aby iloczyn dwóch liczb był liczbą nieparzystą, obie liczby muszą być nieparzyste.

$$A' = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$$

Możemy skorzystać z reguły mnożenia. Na pierwszej kostce mamy trzy możliwości (1, 3, 5 oczek), na drugiej również (1, 3, 5 oczek).

$$|A'| = 3 \cdot 3 = 9$$

$$P(A') = \frac{|A'|}{|\Omega|}$$

$$P(A') = \frac{9}{36}$$

$$P(A') = \frac{1}{4}$$

Stąd:

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$P(A) = \frac{3}{4}$$

Odp.: Prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek, których iloczyn jest liczbą parzystą, wynosi  $\frac{3}{4}$ .

#### Zadanie 12.1.

Wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej to  $f(x) = a(x - p)^2 + q$ , gdzie  $(p, q)$  to współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji.

Zatem dla funkcji  $f(x) = (x + 3)^2 - 1$  współrzędne wierzchołka to  $(-3; -1)$ .

Odp.: D

#### Zadanie 12.2.

Parabola będąca wykresem funkcji  $f(x) = (x + 3)^2 - 1$  ma wierzchołek w punkcie  $(-3; -1)$  i ramiona skierowane do góry (ponieważ współczynnik  $a = 1$ , czyli  $a > 0$ ). Zbiór wartości określamy na podstawie osi  $y$ , zatem kluczowa jest druga współrzędna wierzchołka, która określa wartość minimalną, jaką osiąga funkcja  $f(x)$ . Jest to  $(-1)$ . Zatem zbiór wartości danej funkcji to  $\langle -1; +\infty \rangle$ .

Odp.: B

#### Zadanie 12.3.

Oś symetrii paraboli ma równanie  $x = p$ .

Ze wzoru funkcji odczytujemy, że  $p = -3$ , zatem szukana oś symetrii ma równanie:  $x = -3$

Odp.: B

**Zadanie 13.1.**

$$a_n = \frac{6^n}{12}$$

$$a_{60} = \frac{6^{60}}{12} = \frac{6 \cdot 6^{59}}{12} = \frac{6^{59}}{2} = \frac{6 \cdot 6^{58}}{2} = 3 \cdot 6^{58}$$

Odp.: C

**Zadanie 13.2.**

Sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wyznaczamy ze wzoru  $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ .

Mamy:

$$a_n = \frac{6^n}{12}$$

$$n = 5$$

$$a_1 = \frac{6^1}{12}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

Wyznamy iloraz  $q$  ze wzoru  $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .

$$a_{n+1} = \frac{6^{n+1}}{12}$$

$$q = \frac{\frac{6^{n+1}}{12}}{\frac{6^n}{12}}$$

$$q = \frac{6^{n+1}}{12} : \frac{6^n}{12}$$

$$q = \frac{6^{n+1}}{12} \cdot \frac{12}{6^n}$$

$$q = \frac{6^n \cdot 6}{12} \cdot \frac{12}{6^n}$$

$$q = 6$$

Podstawiamy dane do wzoru na  $S_n$ .

$$S_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-6^5}{1-6}$$

$$S_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-7776}{1-6}$$

$$S_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-7775)}{(-5)}$$

$$S_5 = \frac{1}{2} \cdot 1555$$

$$S_5 = 777,5$$

Odp.: Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu  $a_n = \frac{6^n}{12}$  dla  $n \in \mathbb{N}_+$  jest równa 777,5.

**Zadanie 14.**

Prosta  $y = \frac{1}{2}x + b$  przechodzi przez punkt  $M(4; -1)$ , więc współrzędne tego punktu spełniają równanie danej prostej.

$$\text{Mamy więc: } -1 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$$

$$-1 = 2 + b$$

$$b = -3$$

Zatem pierwsze zdanie jest prawdziwe.

Aby dwie proste były równoległe, muszą mieć takie same współczynniki kierunkowe.

Proste  $y = -2x + 5$  i  $y = \frac{1}{2}x + b$  nie są równoległe, ponieważ mają różne współczynniki kierunkowe.

(Pierwsza prosta ma współczynnik kierunkowy  $(-2)$ , a druga 2).

Zatem drugie zdanie jest fałszywe.

Odp.: P, F

**Zadanie 15.1.**

Wyznaczamy różnicę ciągu  $(a_n)$ .

$$r = a_{n+1} - a_n = -3(n+1) + 5 - (-3n + 5) = -3n - 3 + 5 + 3n - 5 = -3$$

Różnica danego ciągu arytmetycznego jest ujemna, więc ciąg jest malejący.

Odp.: C, 2

**Zadanie 15.2.**

$$a_n < -7$$

$$-3n + 5 < -7$$

$$-3n < -7 - 5$$

$$-3n < -12$$

$$n > 4$$

Zatem wyraz  $a_n$  jest mniejszy od  $(-7)$  dla  $n > 4$ , czyli pierwszym takim wyrazem jest wyraz  $a_5$ .

Odp.: A

**Zadanie 15.3.**Wyznaczamy  $r$  i  $a_1$ .

$$r = a_{n+1} - a_n = -3(n+1) + 5 - (-3n+5) = -3n - 3 + 5 + 3n - 5 = -3$$

$$a_1 = -3 \cdot 1 + 5$$

$$a_1 = 2$$

Skorzystamy ze wzoru na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Podstawiamy dane:

$$-31 = 2 + (n-1) \cdot (-3)$$

$$-31 = 2 - 3n + 3$$

$$3n = 2 + 3 + 31$$

$$3n = 36$$

$$n = 12$$

Odp.: C

**Zadanie 16.**Wykorzystamy następujące zależności:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ,  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 

$$\frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ} - \sin^2 30^\circ - \operatorname{tg} 50^\circ - \cos^2 30^\circ = \operatorname{tg} 50^\circ - \sin^2 30^\circ - \operatorname{tg} 50^\circ - \cos^2 30^\circ =$$

$$= \operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 50^\circ - \sin^2 30^\circ - \cos^2 30^\circ = -(\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) = -1$$

Odp.: D

**Zadanie 17.** $n$  - ilość kul czarnych $4n$  - ilość kul białych

$$|\Omega| = 5n$$

 $A$  - zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli białej

$$|A| = 4n$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$P(A) = \frac{4n}{5n}$$

$$P(A) = \frac{4}{5}$$

Odp.: B

**Zadanie 18.**

Wyznaczamy wysokość trójkąta równobocznego ze wzoru  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Mamy:

$$h = \frac{4\sqrt{3}}{2}$$

$$h = 2\sqrt{3}$$

Wyznaczamy różnicę  $a - h$ .

$$4 - 2\sqrt{3} = 2(2 - \sqrt{3})$$

Zatem pierwsze zdanie jest prawdziwe.

Ze wzoru na pole trójkąta równobocznego  $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$  wyznaczamy pola trójkątów o bokach 4 oraz 6.

$$P_1 = \frac{4^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_1 = 4\sqrt{3}$$

$$P_2 = \frac{6^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_2 = 9\sqrt{3}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{4\sqrt{3}}{9\sqrt{3}}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{4}{9}$$

$$P_1 = \frac{4}{9}P_2$$

Zatem drugie zdanie jest prawdziwe.

Można to również stwierdzić w inny sposób. Dwa trójkąty równoboczne są zawsze podobne.

$$4 = \frac{2}{3} \cdot 6, \text{ czyli skala podobieństwa w tym przypadku wynosi } k = \frac{2}{3}.$$

Stosunek pól jest równy  $k^2$ , więc jest  $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ , czyli  $\frac{4}{9}$ .

Odp.: P, P

**Zadanie 19.**

Wykorzystamy twierdzenie cosinusów, które mówi, że dla trójkąta o bokach długości  $a, b, c$  zachodzi  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$ , gdzie  $\alpha$  to miara kąta między bokami  $b$  i  $c$ .

Mamy więc:

$$a^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3}$$

$$a^2 = 16 + 36 - 16$$

$$a^2 = 36$$

$$a = 6$$

Nie rozważamy rozwiązania  $a = -6$ , ponieważ długość boku musi być liczbą dodatnią.

Odp.: Trzeci bok trójkąta ma długość 6 cm.

**Zadanie 20.**

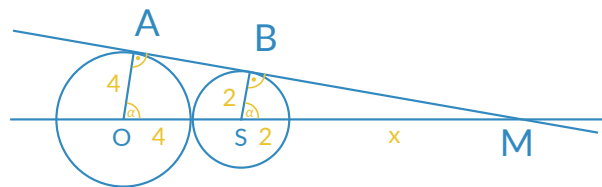
Wprowadźmy na rysunku dane i dodatkowe oznaczenia.

Zauważmy, że trójkąty  $AOM$  i  $BSM$  są podobne, ponieważ mają parami takie same kąty.

Możemy więc zapisać zależność:

$$\frac{|AO|}{|OM|} = \frac{|BS|}{|SM|}$$

$$\frac{4}{8+x} = \frac{2}{2+x}$$



Mnożymy „na krzyż”.

$$4(2+x) = 2(8+x)$$

$$8+4x = 16+2x$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$$|SM| = x + 2$$

Stąd  $|SM| = 6$

$$\cos \alpha = \frac{|BS|}{|SM|}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{6}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}$$

Odp.: Cosinus kąta  $BSM$  jest równy  $\frac{1}{3}$ .

**Zadanie 21.**

Oznaczmy wymiary strony.

Pole wyznaczamy następująco:  $(a - 6)(b - 4)$ , gdzie  $a > 6$  i  $b > 4$ .

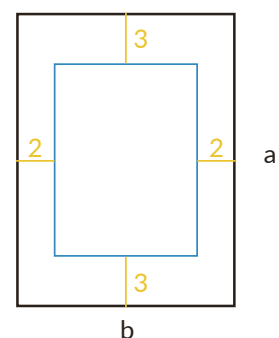
Szukamy wartości  $a$  i  $b$ , dla których pole to będzie jak największe.

Mamy:

$$2a + 2b = 84$$

$$a + b = 42$$

$$b = 42 - a$$



Zapiszemy pole jako funkcję zmiennej  $a$ .

$$f(a) = (a - 6)(42 - a - 4)$$

$$f(a) = (a - 6)(38 - a)$$

$$a > 6 \text{ i } a < 38, \text{ czyli } a \in (6; 38)$$

$$f(a) = -a^2 + 44a - 288$$

Jest to funkcja kwadratowa, której wykresem jest parabola o ramionach skierowanych do dołu. Zatem wartość maksymalna będzie osiągnięta w wierzchołku.

$$x_w = \frac{-44}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_w = 22$$

Wartość maksymalna będzie osiągnięta dla  $a = 22$ .

Obliczamy  $b$ .

$$b = 42 - a$$

$$b = 42 - 22$$

$$b = 20$$

Odp.: Wymiary strony tego albumu to 22 cm wysokość i 20 cm szerokość.

#### Zadanie 22.1.

Mediana, czyli wartość środkowa. Jest wystawionych 25 ocen, więc środkowa jest ocena trzynasta. Ocen mamy na uporządkowane, więc odczytujemy trzynastą z nich. Są dwie „1”, cztery „2”, pięć „3” – to jedenaście ocen. Następnie jest osiem „4”. Zatem trzynastą oceną jest „4”.

Odp.: C

#### Zadanie 22.2.

Obliczamy liczbę uczniów w klasie:  $2 + 4 + 8 + 5 + 4 + 2 = 25$

Wyznaczamy średnią arytmetyczną:

$$\frac{2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 8 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{25} = \frac{89}{25} = 3,56$$

Są dwie „1”, cztery „2”, pięć „3”, czyli jedenaście ocen niższych od średniej.

$$\frac{11}{25} \cdot 100\% = 44\%$$

Odp.: D

**Zadanie 23.**

Wprowadźmy oznaczenia.

$$a = 6\sqrt{2}$$

$$k = 8$$

$x$  – połowa długości przekątnej podstawy (kwadratu).

Przekątna kwadratu o boku  $a$  ma długość  $a\sqrt{2}$ .

$$x = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2$$

$$x = 6$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczymy długość wysokości  $H$ .

$$H^2 + x^2 = k^2$$

$$H^2 + 6^2 = 8^2$$

$$H^2 + 36 = 64$$

$$H^2 = 28$$

$$H = \sqrt{28}$$

$$H = 2\sqrt{7}$$

Obliczamy objętość ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H, \text{ gdzie } P_p = a^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot (6\sqrt{2})^2 \cdot 2\sqrt{7}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 2\sqrt{7}$$

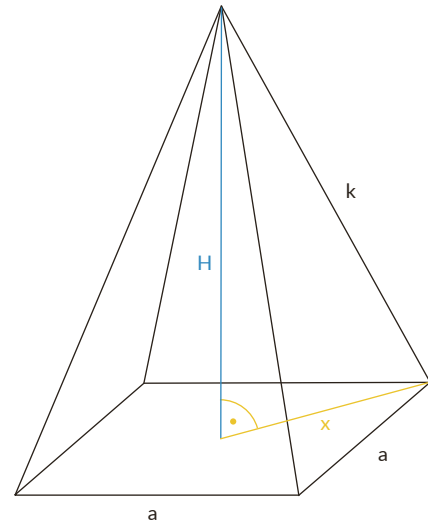
$$V = 48\sqrt{7}$$

Odp.: Objętość danego ostrosłupa jest równa  $48\sqrt{7}$ .

**Zadanie 24.**

$$16n^2 + 24n + 7 = 16n^2 + 24n + 4 + 3 = 4(4n^2 + 6n + 1) + 3$$

Przedstawiliśmy daną liczbę jako sumę liczby 3 oraz iloczynu 4 i pewnej liczby naturalnej  $4n^2 + 6n + 1$ .



**Zadanie 25.**

Pole powierzchni kuli:  $P = 4\pi r^2$ , gdzie  $r$  to promień kuli.

Z danych w zadaniu otrzymujemy:

$$4\pi r^2 = 144\pi \quad | : 4\pi$$

$$r^2 = 36 \text{ i } r > 0$$

$$r = 6$$

Obliczamy objętość kuli:  $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi$

Odp.:  $V = 288\pi$

**Zadanie 26.**

Pole powierzchni całkowitej czworościanu z zadania:  $P_c = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$

Z danych w zadaniu otrzymujemy:  $a^2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ , zatem długość krawędzi czworościanu  $a = 4$ .

Czworościan ma sześć wszystkich krawędzi, więc ich suma wynosi:  $6 \cdot 4 = 24$ .

Odp.: B