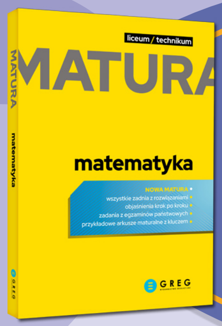



# Geometria analityczna

## Odpowiedzi do zadań CKE

### Zaglądamy do CKE

**Zadanie 40.**

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$, dany jest okrąg $\mathcal{O}$ określony równaniem:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

**Zadanie 40.1. (0–1)**

**Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–G.**

1. Środek $S$ okręgu $\mathcal{O}$ ma współrzędne

**A.** $S = (2, -3)$
**B.** $S = (-2, -3)$
**C.** $S = (-2, 3)$
**D.** $S = (-2, 3)$

2. Promień $r$ okręgu $\mathcal{O}$ jest równy

**E.** $r = 16$
**F.** $r = 4$
**G.** $r = 5$

**Rozwiązanie:**

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$

Odczytujemy środek tego okręgu: $S = (2, -3)$

Odczytujemy promień okręgu: $r = \sqrt{16} = 4$

**Odp.:** 1. A, 2. F

## Zadanie 40.2. (0–2)

**Oblicz współrzędne $x$ punktów przecięcia okręgu $\mathcal{O}$ z osią $Ox$.**

**Rozwiązanie:**

Rozwiążemy układ dwóch równań, w którym jedno jest równaniem okręgu, a drugie jest równaniem osi *Ox*. Każdy punkt leżący na osi *Ox* ma współrzędne $(x, 0)$, zatem $y = 0$ dla każdej liczby rzeczywistej $x$.

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+3)^2=16\\ y=0\end{cases}$$

$$(x-2)^2+(0+3)^2=16$$

$$(x-2)^2+9=16$$

$$(x-2)^2=7$$

$$|x-2|=\sqrt{7}$$

$$x_1=2+\sqrt{7} \quad \text{lub} \quad x_2=2-\sqrt{7}$$

## Zadanie 41.

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$, dane są okrąg $\mathcal{O}$ o środku w punkcie $S=(3,-4)$ i prosta $k$ o równaniu $2x-y-11=0$.

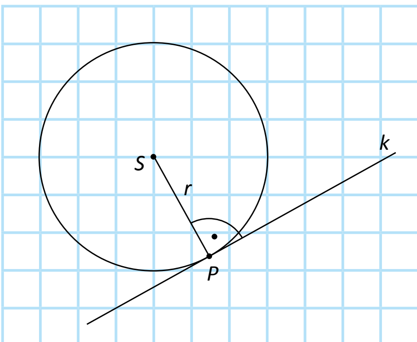
Okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do prostej $k$ w punkcie $P$.

## Zadanie 41.1. (0–2)

**Wyznacz i zapisz równanie okręgu $\mathcal{O}$.**

**Rozwiązanie:**

Rysunek poglądowy:




1. Zauważmy, że odległość punktu *S* od prostej *k* jest równa promieniowi okręgu *O*. Zastosujemy wzór na odległość punktu od prostej i obliczymy promień okręgu:

$$r=d(S,k)=\frac{|2\cdot 3-1\cdot(-4)-11|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

2. Zapiszemy równanie okręgu:

$$(x-3)^2+(y+4)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$(x-3)^2+(y+4)^2=\frac{1}{5}$$

## Zadanie 41.2. (0–2)

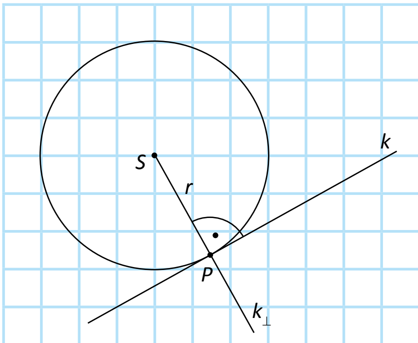
**Oblicz współrzędne punktu $P$, w którym okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do prostej $k$.**

**Rozwiązanie:**

**Sposób 1.** (rozwiązanie układu równań złożonego z równań prostych $k$ i $k_\perp$)

1. Oznaczmy przez $k_\perp$ prostą prostopadłą do prostej $k$. Punkt styczności okręgu $O$ i prostej $k$ jest punktem przecięcia się prostej $k$ z prostą $k_\perp$ prostopadłą do niej i przechodzącą przez środek tego okręgu. Należy rozwiązać układ równań złożony z równań obu tych prostych.

Rysunek poglądowy:




2. Wyznaczymy równanie prostej $k_\perp$ – prostopadłej do $k$ i przechodzącej przez punkt $S$:

$k$: $y = 2x - 11$

Prosta $k_\perp$ ma równanie:

$k_\perp$: $y = \frac{1}{2}x + b$

Punkt $S = (3, -4)$ należy do prostej $k_\perp$, zatem: $-4 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + b$ stąd $b = -\frac{5}{2}$ więc prosta $k_\perp$ ma równanie:

$k_\perp$: $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

3. Rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 11 \\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases}$$

$-\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} = 2x - 11$ stąd $-\frac{5}{2}x = -\frac{17}{2}$ więc $x = \frac{17}{5}$

$y = 2x - 11 = 2 \cdot \frac{17}{5} - 11 = -\frac{21}{5}$

$\begin{cases} x = \frac{17}{5} \\ y = -\frac{21}{5} \end{cases}$ zatem $P = \left(\frac{17}{5}, -\frac{21}{5}\right)$

**Sposób 2.** (rozwiązanie układu równań złożonego z równania prostej *k* i równania okręgu *O*)

**Uwaga!**

Sposób 1. rozwiązania zadania 41.2. jest niezależny od rozwiązania zadania 41.1. Natomiast sposób 2. pokazuje takie rozwiązanie zadania 41.2., w którym zdający może wykorzystać rozwiązanie zadania 41.1.

Współrzędne punktu styczności prostej *k* i okręgu *O* są rozwiązaniami układu równań, w którym jedno jest równaniem okręgu *O*, a drugie jest równaniem prostej *k*. Zapiszemy i rozwiążemy ten układ równań. Wykorzystamy wyznaczone w zadaniu 41.1. równanie okręgu:

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y+4)^2=\frac{1}{5} \\ y=2x-11 \end{cases}$$

$(x-3)^2+(2x-11+4)^2=\frac{1}{5}$ zatem $(x-3)^2+(2x-7)^2=\frac{1}{5}$

$$x^2-6x+9+4x^2-28x+49-\frac{1}{5}=0$$

$$x=\frac{34}{10}=\frac{17}{5}$$

$$y=2x-11=2\cdot\frac{17}{5}-11=-\frac{21}{5}$$

$\begin{cases} x=\frac{17}{5} \\ y=-\frac{21}{5} \end{cases}$ więc $P=\left(\frac{17}{5},-\frac{21}{5}\right)$

## Zadanie 42. (0–1)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych $(x,y)$, dane są punkty $A=(1,2)$ oraz $B=(3,7)$. Punkty $A_O$ oraz $B_O$ są odpowiednio obrazami punktów $A$ i $B$ w symetrii środkowej o środku w punkcie $O=(0,0)$.

**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A_O$ i $B_O$ jest równy

**A.** $\frac{5}{2}$ **B.** $-\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $-\frac{2}{5}$

**Rozwiązanie:**

$$A=(1,2)\xrightarrow{S[0,0]}A_0=(\overset{x_1}{-1},\overset{y_1}{-2})$$

$$B=(3,7)\xrightarrow{S[0,0]}B_0=(\overset{x_2}{-3},\overset{y_2}{-7})$$

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-7+2}{-3+1}=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2}$$

**Odp.:** A

## Zadanie 19. (0–2)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$, dana jest prosta $k$ o równaniu $y = -3x + 1$.

**Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.**

**19.1.** Jedną z prostych równoległych do prostej $k$ jest prosta o równaniu

**A.** $y = 3x + 2$ **B.** $y = -3x + 2$ **C.** $y = \frac{1}{3}x + 1$ **D.** $y = -\frac{1}{3}x + 1$

**19.2.** Jedną z prostych prostopadłych do prostej $k$ jest prosta o równaniu

**E.** $y = \frac{1}{3}x + 2$ **F.** $y = -\frac{1}{3}x + 2$ **G.** $y = 3x + 1$ **H.** $y = -3x + 1$

**Rozwiązanie:**

$y = -3x + 1$

**19.1.** Prosta równoległa do k musi mieć $a = -3$.

**Odp.:** B

**19.2.** $a \cdot (-3) = -1$ $a = \frac{1}{3}$ – taki musi być współczynnik kierunkowy drugiej (szukanej) prostej.

**Odp.:** A

## Zadanie 20. (0–1)

W kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$ dany jest kwadrat $ABCD$. Wierzchołki $A = (-2, 1)$ i $C = (4, 5)$ są końcami przekątnej tego kwadratu.

**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Długość przekątnej kwadratu $ABCD$ jest równa

**A.** $10$ **B.** $2\sqrt{13}$ **C.** $2\sqrt{10}$ **D.** $8$

**Rozwiązanie:**

Należy skorzystać ze wzoru na długość odcinka:

$$|AC| = \sqrt{(x_C + x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$|AC| = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (5 - 1)^2}$$

$$|AC| = \sqrt{(4 + 2)^2 + 4^2}$$

$$|AC| = \sqrt{6^2 + 4^2}$$

$$|AC| = \sqrt{36 + 16}$$

$$|AC| = \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$$

**Odp.:** B