

# Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

## Odpowiedzi do zadań CKE

### Zaglądamy do CKE

#### Zadanie 27.

Czas  $T$  połowicznego rozpadu izotopu promieniotwórczego to czas, po którym liczba jąder danego izotopu (a zatem i masa tego izotopu) zmniejsza się o połowę – tzn. połowa jąder danego izotopu przemienia się w inne jądra. Liczba jąder  $N(t)$  izotopu promieniotwórczego pozostających w próbce po czasie  $t$ , licząc od chwili  $t_0 = 0$ , wyraża się zależnością wykładniczą:

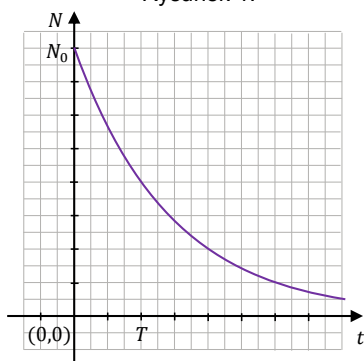
$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie  $N_0$  jest liczbą jąder izotopu promieniotwórczego w chwili początkowej  $t_0 = 0$ .

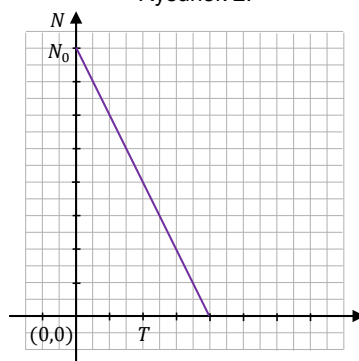
#### Zadanie 27.1. (0–1)

Na poniższych rysunkach 1.–4. przedstawiono wykresy różnych zależności.

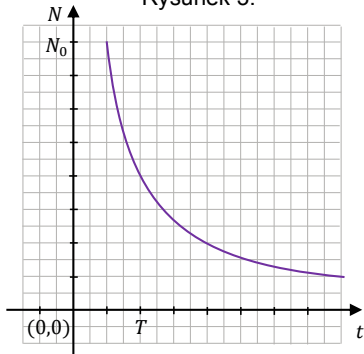
Rysunek 1.



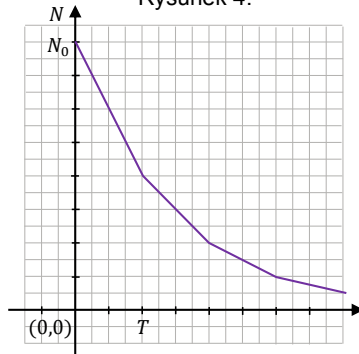
Rysunek 2.



Rysunek 3.



Rysunek 4.



**Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Wykres zależności wykładniczej  $N(t)$  – opisanej we wstępie do zadania – przedstawiono na

**A.** rysunku 1.

**B.** rysunku 2.

**C.** rysunku 3.

**D.** rysunku 4.

**Rozwiązanie:**

$$N(t) = N_0 \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$$

$$N(0) = N_0 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^0 = N_0 \cdot 1 = N_0$$

$$N(T) = N_0 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{T}{T}} = \frac{1}{2} N_0$$

$N(t)$  – funkcja wykładnicza

**Odp.:** A

**Zadanie 27.2. (0–3)**

Czas połowicznego rozpadu węgla  $^{14}\text{C}$  to około 5700 lat. Naukowcy oszacowali za pomocą datowania radiowęglowego, że masa izotopu węgla  $^{14}\text{C}$  w pewnym organicznym znalezisku archeologicznym stanowi  $\frac{1}{16}$  masy tego izotopu, jaka utrzymywała się podczas życia organizmu.



**Oblicz, ile lat ma opisane znalezisko archeologiczne. Wynik podaj z dokładnością do stu lat.**

**Rozwiązanie:**

$$N(t) = N_0 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$$

$$T = 5700$$

$$N(t) = \frac{1}{16} N_0$$

$$t = ?$$

$$\frac{1}{16} N_0 = N_0 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\left( \frac{1}{2} \right)^4 = \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\frac{4}{1} = \frac{t}{5700}$$

$$t = 4 \cdot 5700 = \underline{22800}$$

**Odp.:** Opisane znalezisko archeologiczne ma 22800 lat.

**Zadanie 13.**

Czas  $T$  półtrwania leku w organizmie to czas, po którym masa leku w organizmie zmniejsza się o połowę – po przyjęciu jednorazowej dawki.

Przyjmij, że po przyjęciu jednej dawki masa  $m$  leku w organizmie zmienia się w czasie zgodnie z zależnością wykładniczą

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie:

$m_0$  – masa przyjętej dawki leku

$T$  – czas półtrwania leku

$t$  – czas liczony od momentu przyjęcia dawki.

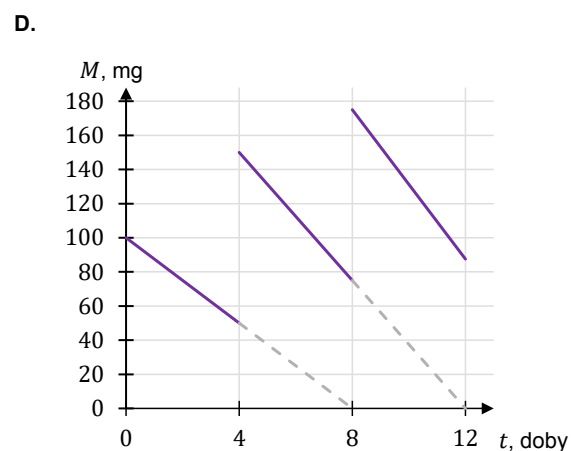
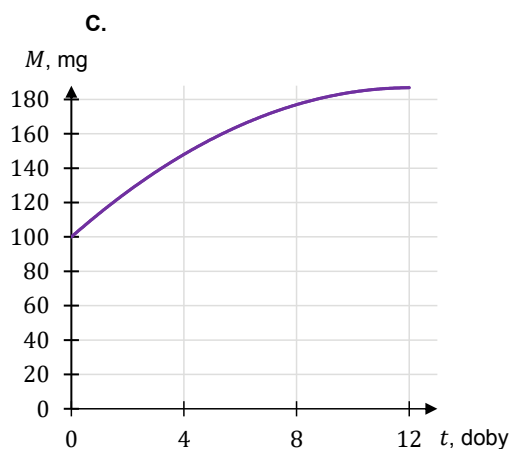
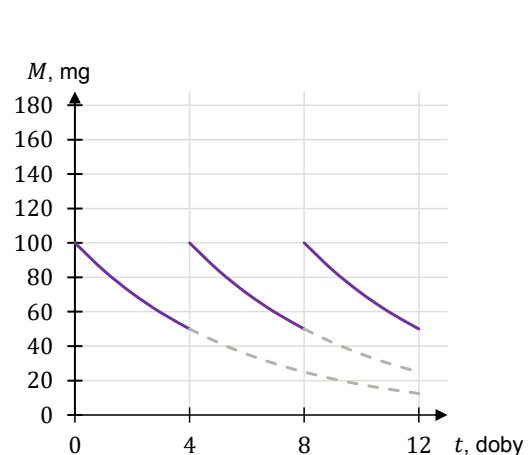
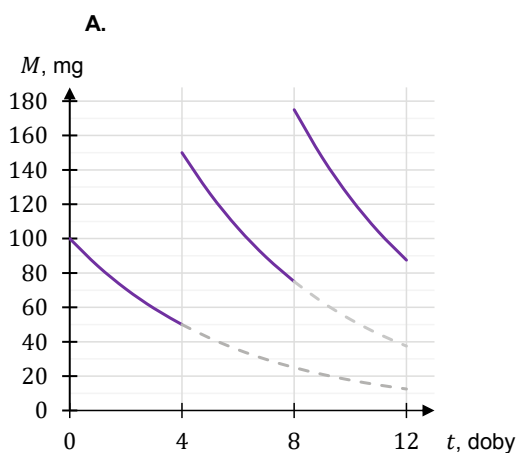
W przypadku przyjęcia kilku(nastu) dawek powyższa zależność pozwala obliczyć, ile leku pozostało w danym momencie w organizmie z każdej poprzednio przyjętej dawki. W ten sposób obliczone masy leku z przyjętych poprzednich dawek sumują się i dają informację o całkowitej aktualnej masie leku w organizmie.

Pacjent otrzymuje co 4 dni o tej samej godzinie dawkę  $m_0 = 100$  mg leku L. Czas półtrwania tego leku w organizmie jest równy  $T = 4$  doby.

**Zadanie 13.1. (0–1)**

**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Wykres zależności masy  $M$  leku L w organizmie tego pacjenta od czasu  $t$ , liczonego od momentu przyjęcia przez pacjenta pierwszej dawki, przedstawiono na rysunku



**Rozwiązanie:**

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$m_0 = 100$$

$$T = 4$$

$$m(4) = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

$$m(0) = 100 + 50 = 150$$

**Odp.:** A.

**Zadanie 13.2. (0–3)**

Oblicz masę leku  $L$  w organizmie tego pacjenta tuż przed przyjęciem jedenastej dawki tego leku. Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,1 mg.

Zapisz obliczenia.

**Rozwiązanie:**

$$\left. \begin{array}{l} \text{Po 4 dniach: } 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{4}} = 50 \\ \text{Po 8 dniach: } 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{8}{4}} = 25 \end{array} \right\} \text{tak tworzy się ciąg geometryczny } q = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$$

$$S_{10} = 50 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\frac{1}{2}} = 100 \cdot \frac{1023}{1024} \approx 99,9 \text{ mg}$$

**Odp.:** Przed przyjęciem 11 dawki w ciele pacjenta będzie ok. 99,9 mg leku.