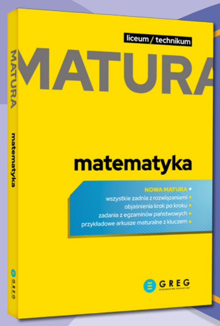

Ciągi

Odpowiedzi do zadań CKE

Zaglądamy do CKE

Zadanie 24. (0–2)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym: $a_n = 4n - 9$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Wykaż, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

Rozwiązanie:

Sposób 1.

Żeby udowodnić, że ciąg jest arytmetyczny, należy wykazać, że różnica dwóch kolejnych wyrazów $a_{n+1} - a_n$ jest stała i nie zależy od n. Wyznaczymy wzór ogólny na $n + 1$ wyraz ciągu:

$a_{n+1} = 4(n + 1) - 9 = 4n + 4 - 9 = 4n - 5$ dla $n \geq 1$

Obliczymy różnicę kolejnych dwóch wyrazów ciągu (a_n):

$a_{n+1} - a_n = 4n - 5 - (4n - 9) = 4n - 5 - 4n + 9 = 4$ dla każdego $n \geq 1$

To oznacza, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = 4$.

Sposób 2.

Żeby udowodnić, że ciąg jest arytmetyczny, należy wykazać, że dla dowolnych kolejnych trzech wyrazów ciągu a_n, a_{n+1}, a_{n+2} zachodzi związek: $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$ dla $n \geq 1$.

Wyznaczymy wzór ogólny na $n + 1$ oraz $n + 2$ wyraz ciągu:

$a_{n+1} = 4(n + 1) - 9 = 4n + 4 - 9 = 4n - 5$ dla $n \geq 1$

$a_{n+2} = 4(n + 2) - 9 = 4n + 8 - 9 = 4n - 1$ dla $n \geq 1$

Sprawdzamy, czy dla kolejnych trzech wyrazów ciągu (a_n) zachodzi związek:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$$

Prawą stronę równania wyrazimy przez n:

$\frac{a_n + a_{n+2}}{2} = \frac{4n - 9 + 4n - 1}{2} = \frac{8n - 10}{2} = 4n - 5$ dla każdego $n \geq 1$

Po uwzględnieniu faktu, że: $a_{n+1} = 4n - 5$, otrzymujemy równość:

$\frac{a_n + a_{n+2}}{2} = a_{n+1}$

To oznacza, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Zadanie 25. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ jest

A.	rosnący,	ponieważ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$	**1.**	różnica $a_{n+1} - a_n$ jest liczbą ujemną.
B.	malejący,		**2.**	różnica $a_{n+1} - a_n$ jest równa zero.
C.	stały,		**3.**	różnica $a_{n+1} - a_n$ jest liczbą dodatnią.

Rozwiązanie:

$a_n = n^2 - n$

$a_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + \cancel{1} - n - \cancel{1} = n^2 + n$

$a_{n+1} - a_n = n^2 + n - (n^2 - n) = \cancel{n^2} + n - \cancel{n^2} + n = 2n$

dla $n \geq 1$ mamy $2n > 0$

Zatem $a_{n+1} > a_n$ – ciąg jest rosnący.

Odp.: A3

Zadanie 14. (0–1)

Klient wpłacił do banku 20 000 zł na lokatę dwuletnią. Po każdym rocznym okresie oszczędzania bank dolicza odsetki w wysokości 3% od kwoty bieżącego kapitału znajdującego się na lokacie.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po 2 latach oszczędzania w tym banku kwota na lokacie (bez uwzględniania podatków) jest równa

A. $20\,000 \cdot (1{,}12)^2$ **B.** $20\,000 \cdot 2 \cdot 1{,}03$ **C.** $20\,000 \cdot 1{,}06$ **D.** $20\,000 \cdot (1{,}03)^2$

Rozwiązanie:

$K_0 = 20000$
$t = 2$
$p = 3$
$K_n = 20000 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2 = 20000 \cdot 1{,}03^2$

Odp.: D

Zadanie 15. (0–1)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = -3n + 5$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczby $2, (-1), (-4)$ są trzema kolejnymi początkowymi wyrazami ciągu (a_n).	**P**	**F**
(a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy równej 5.	**P**	**F**

Rozwiązanie:

$a_n - 3n + 5$

1) $a_1 = -3 + 5 = 2$
   $a_2 = -6 + 5 = -1$
   $a_3 = -9 + 5 = -4$
2) $r = -1 - 2 = -3$

Odp.: PF